

А.В. РОГОВОЙ

**СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
СМЕШАННОГО ТИПА**

МОНОГРАФИЯ

Шымкент 2019

**СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА**

МОНОГРАФИЯ

**Шымкент
2019**

УДК 517.946
ББК 22.1 я7
P59

Рекомендовано к печати решением Ученого Совета
университета «Мирас» (протокол № 10 от 31.05.2019 г.)

Рецензенты:

Нысанов Е.А., профессор кафедры информатики Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, доктор физико-математических наук

Муратов А.С., профессор кафедры информационных технологий и телекоммуникаций университета «Мирас», доктор технических наук

Иманбаев Н.С., профессор кафедры «Математика» Южно-Казахстанского государственного педагогического университета, кандидат физико-математических наук

Роговой А.В.

P59 Свойства решений краевых задач для уравнений смешанного типа:
Монография. - Шымкент: университет «Мирас», 2019.- 140 с.

ISBN 978-9965-32-816-9

Монография посвящена краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. Рассмотрены однородная и неоднородная задача Трикоми и ее сопряженная для уравнений Лаврентьева–Бицадзе и Геллерстедта в случае, когда эллиптическая часть границы совпадает с частью некоторой окружности для уравнений Лаврентьева–Бицадзе и с кривой особого типа для уравнения Геллерстедта. Введены новые классы решений рассмотренных задач и доказаны критерии существования. Ряд решений получен в явном виде.

Для научных работников, преподавателей, докторантов, магистрантов и студентов ВУЗов.

УДК 517.946
ББК 22.1 я7

ISBN 978-9965-32-816-9

© Роговой А.В., 2019.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1 Краткий обзор результатов по изучению задачи Трикоми для уравнений смешанного типа	5
2 Однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе	17
2.1 Установление общей формы разрывных решений	19
2.2 Рассмотрение частных случаев контуров	26
2.3 Получение разрывного решения для контура общего вида	65
3 Неоднородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе	74
3.1 Формулировка результатов и классов решений	74
3.2 Исследование задачи в гиперболической части области	81
3.3 Исследование задачи в эллиптической части области	84
3.4 Определение свойств решений	101
4 Свойства решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта	105
4.1 Постановка задачи	105
4.2 Исследование задачи в гиперболической части области	108
4.3 Исследование задачи в эллиптической части области	112
4.4 Определение свойств решений	118
Заключение	133
Литература	135

Введение

Общеизвестно, что к дифференциальным уравнениям в частных производных 2-го порядка, согласно их основным характеристикам, относят 3 типа уравнений: параболического, гиперболического и эллиптического, типа.

К уравнениям смешанного типа относят уравнения, которые для одной части изучаемой области являются уравнениями эллиптического типа, а для другой – гиперболического; эти части разделяются линией (либо поверхностью) перехода, вдоль которой уравнение или вырождается к параболическому, или не определено.

В сороковых годах двадцатого века начались систематические исследования уравнений, связанные с их ролью для возникших на практике проблем, которые описываются уравнениями данного типа.

Затем были установлены применения уравнений смешанного типа для газо-, магнито- и гидродинамики.

Эволюция краевых проблем с дифференциальными уравнениями смешанного типа для частных производных идет по следующим базовым направлениям:

- поиск решений задачи для различных классов функций;
- изучение новых областей и краевых условий, при которых находится решение, и возникающие вследствие этого новые краевые задачи;
- рассмотрение обобщенных уравнений смешанного типа.

В данной монографии изучается задача Трикоми в случае уравнений Геллерстедта и Лаврентьева–Бицадзе при условии, что эллиптический отрезок границы является частью определенной окружности в случае уравнения Лаврентьева–Бицадзе либо кривой особого вида в случае уравнения Геллерстедта. В случае однородных уравнений Лаврентьева–Бицадзе вводится новый тип решений, не обладающих свойством непрерывности для угловых точек области, и явным образом построены нетривиальные решения данного типа. В случае неоднородных уравнений Лаврентьева–Бицадзе вводится понятие n - регулярных решений и доказано необходимое и достаточное условие существования подобного решения. В случае уравнения Геллерстедта сформулировано необходимое и достаточное условие существования n - регулярных решений в зависимости от углов подхода линии изменения типов уравнения к кривой для эллиптической подобласти. Доказательство базируется на применении интегральных преобразований Меллина и характеристик специальных функций.

В качестве инструментария применялись методы исследования дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, методы специальных функций и интегральных преобразований.

1 Краткий обзор результатов по изучению задачи Трикоми для уравнений смешанного типа

Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка по своим основным характеристикам классифицируются на три типа уравнений: эллиптического, гиперболического и параболического типа.

Уравнениями смешанного типа называются уравнения, которые в одной части рассматриваемой области принадлежат эллиптическому типу, а в другой – гиперболическому; эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение либо вырождается в параболическое, либо не определено.

Глубокое изучение уравнений смешанного типа было начато с работы Ф.Трикоми [1], опубликованной в 20-х годах XX века. В этой работе для уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1.1)$$

которое сейчас называют уравнением Трикоми, была изучена следующая задача, носящая в настоящее время название задачи Трикоми: в области Ω , ограниченной дугой Жордана σ , лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, и отрезками AC и BC характеристик $x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0$,

$x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1$ уравнения (1.1), выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2}, -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\right)$, ищется регулярное решение $u(x, y)$ этого уравнения, непрерывное в $\Omega \cup \sigma \cup AC \cup BC$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \sigma, \quad (1.2)$$

$$u(x, y) = \phi(x), \quad (x, y) \in AC, \quad (1.3)$$

где φ и ϕ - заданные действительные непрерывные функции.

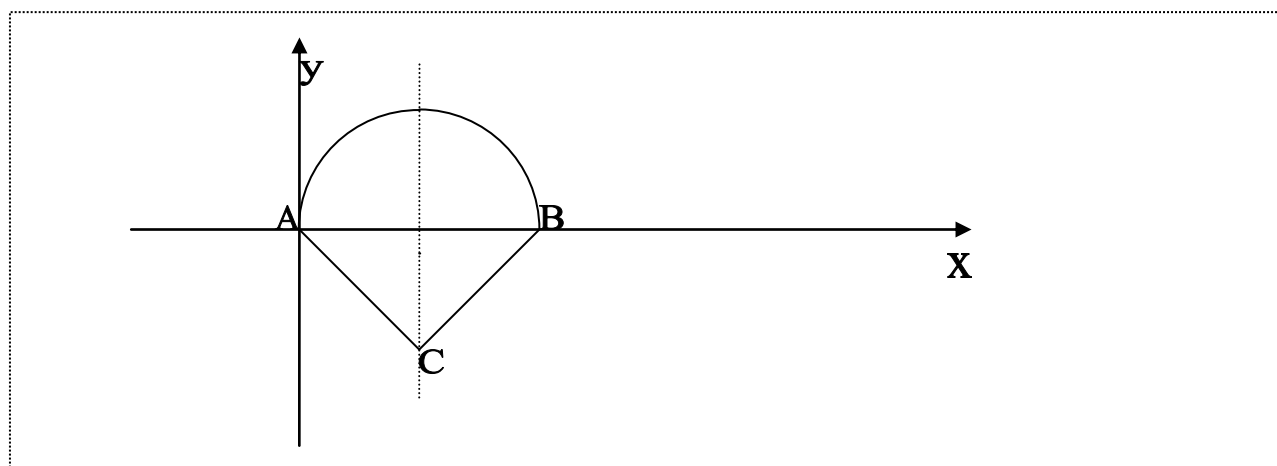


Рисунок 1.1 – Область Ω

Ф.Трикоми доказал существование и единственность решения этой задачи при определенных дополнительных требованиях относительно поведения частных производных u_x, u_y в $\Omega \cup \sigma \cup AC \cup BC$, гладкости функции ϕ и в предположении, что кривая σ оканчивается двумя сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' нормальной кривой $(x - x_0)^2 + \frac{4}{9}y^3 = C^2$, а в остальной части отклоняется от этой кривой наружу.

Для доказательства разрешимости поставленной задачи Ф.Трикоми предложил следующую идею, ставшую основным инструментом изучения краевых задач для уравнений смешанного типа. Эта идея заключается в том, что полагают как бы известной следующую функцию:

$$v(x) = u_y(x, 0)$$

(след первой производной по y решения задачи на отрезке AB), и отдельно решают задачу N в эллиптической части области Ω :

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y > 0,$$

$$u|_{\sigma} = \phi(x, y),$$

$$u_y(x, +0) = v(x),$$

и задачу Коши-Гурса в гиперболической части области:

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y < 0,$$

$$u|_{AC} = \phi(x),$$

$$u_y(x, -0) = v(x).$$

Затем оба полученных решения вместе с их первыми производными непрерывно «склеивают» на отрезке AB .

В результате доказательство существования решения задачи Трикоми сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно функции $v(x)$ с последующей регуляризацией и сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, после чего изучаются свойства полученного решения в зависимости от начальных данных.

Исследования Ф.Трикоми были продолжены в 30-х годах XX века М.Чибрарио и С.Геллерстедтом.

М.Чибрарио показала [2], что квазилинейное уравнение второго порядка

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (1.4)$$

при некоторых условиях гладкости коэффициентов A , B и C с помощью неособенного вещественного преобразования независимых переменных в окрестности линии вырождения типа γ может быть приведено к каноническому виду

$$y^n u_{xx} + u_{yy} = \varphi_1(x, y, u, u_x, u_y),$$

когда (4) – уравнение смешанного типа первого рода, то есть в случае, когда параболическая линия γ нигде не касается характеристических направлений уравнения (4):

$$Ady^2 - 2Bdx dy + Cdx^2 \neq 0 \text{ всюду вдоль } \gamma;$$

и к виду

$$u_{xx} + y^n u_{yy} = \varphi_2(x, y, u, u_x, u_y),$$

когда (1.4) – уравнение смешанного типа второго рода, то есть в случае, при котором в каждой точке параболической линии γ касательная совпадает с характеристическим направлением уравнения (1.4):

$$Ady^2 - 2Bdx dy + Cdx^2 = 0,$$

а линия γ является одновременно характеристикой уравнения (1.4).

С.Геллерстедт [3] решает задачу Трикоми для уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} - Cu = F(x, y) \quad (1.5)$$

при тех же ограничениях на кривую σ , что и у Ф.Трикоми.

В последующих работах [4]-[5] для уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (1.6)$$

где m – натуральное нечетное число, С.Геллерстедт исследовал видоизмененную задачу Трикоми, когда наряду с (2) носителями данных вместо (3) являются определенным образом подобранные отрезки характеристик этого уравнения. Уравнение (1.6) получило название уравнения Геллерстедта. Следуя идее Ф.Трикоми, С.Геллерстедт сводит решение упомянутых задач к сингулярному интегральному уравнению, а затем – к уравнению Фредгольма.

В 40-х годах XX века уравнения смешанного типа стали объектом систематических исследований, что было связано, прежде всего, с их значением для возникших в приложениях проблем, описываемых уравнениями смешанного типа.

В работе Ф.И.Франкля [6] показано, что задача истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками (внутри сосуда скорость дозвуковая) сводится к задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (K(0) = 0, \quad K'(0) > 0). \quad (1.7)$$

И.Н.Векуа [7] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа в связи с задачами в теории бесконечно малых изгибов поверхностей, а также безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

В дальнейшем были установлены приложения уравнений смешанного типа в магнито-, гидро- и газодинамике.

Изучение уравнений смешанного типа в 50-х годах XX века было связано в основном с установлением единственности решения краевых задач, а также с использованием новых методов, в том числе методов функционального анализа.

М.А.Лаврентьев [8] для упрощения исследования краевых задач для уравнений смешанного типа предложил исследовать модельное уравнение

$$\operatorname{sgn} y \, u_{xx} + u_{yy} = f(x, y). \quad (1.8)$$

Подробное исследование задачи Трикоми и ее различных обобщений для уравнения (1.8), применяя аппарат теории функций комплексного переменного, провел А.В.Бицадзе [9] – [13]. А.В.Бицадзе решил также для уравнения (1.8) задачу Трикоми в многосвязной области и задачу с заданной нормальной производной.

Уравнение (1.8) получило название уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Для задачи Трикоми имеет место следующий принцип экстремума: решение $u(x, y)$ задачи Трикоми (для однородного уравнения), равное нулю на характеристике AC , положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{\Omega}$ принимает на дуге σ .

Принцип экстремума имеет большое значение, прежде всего потому, что из него следует единственность задачи Трикоми. Действительно, если $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ – два решения неоднородной задачи Трикоми, то функция $u_0(x, y) \equiv u_1(x, y) - u_2(x, y)$ будет, в силу линейности уравнения и краевых условий, решением полностью однородной задачи Трикоми, то есть $u_0|_{AC} = 0$, а значит к функции u_0 применим принцип экстремума, и свое максимальное положительное и минимальное отрицательное значение она принимает на дуге σ , но, в силу однородных краевых условий, $u_0|_{\sigma} = 0$, откуда $u_0(x, y) \equiv 0$ или $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$, что и доказывает единственность.

Кроме того, принцип экстремума позволяет построить альтернирующий процесс типа Шварца для решения задачи Трикоми при довольно общих предположениях.

Принцип экстремума впервые был сформулирован и использован в случае уравнения Лаврентьева-Бицадзе (1.8) в работе А.В.Бицадзе [9]. Позднее он был установлен для уравнения Трикоми (1.1) в работе П.Жермена и Р.Баде [14]. К.И.Бабенко [15] доказал справедливость принципа экстремума для задачи Трикоми в случае уравнения Трикоми с младшими членами при некоторых ограничениях.

Единственность решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина (1.7) была, при некоторых ограничениях, установлена еще Ф.И.Франклем [6]. В работе С.Агмона, Л.Ниренберга и М.Проттера [16] была доказана единственность решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина с младшими членами. В дальнейшем М.Проттер в своих работах [17]–[18] обобщил теорему единственности для уравнения Чаплыгина.

Для доказательства единственности решения задачи Трикоми М.Проттер применил метод *abc*, который состоит в следующем. Пусть $u(x, y)$ - квазирегулярное решение уравнения (1.7) (то есть решение из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям), причем $u(x, y)$ удовлетворяет однородным граничным условиям задачи. Рассмотрим интеграл

$$\iint_{\Omega} (au + bu_x + cu_y)(Ku_{xx} + u_{yy}) dx dy,$$

где a , b и c - достаточно гладкие функции от (x, y) . Этот интеграл, в силу уравнения (1.7), равен нулю. Подбираются функции a , b и c так, чтобы после преобразования этого интеграла с помощью формулы Грина получилось положительно определенное выражение, которое может быть равно нулю, только если $u(x, y) \equiv 0$. Тем самым, доказывается единственность решения задачи Трикоми.

Методы функционального анализа для доказательства существования слабых решений краевых задач впервые были применены к уравнениям смешанного типа С.Моравец [19], которая использовала метод априорных оценок для систем первого порядка, эквивалентных уравнению Чаплыгина.

К.Фридрихс [20] изучал более общие системы. При этом для решения задачи К.Фридрихс использовал разработанный им метод положительных симметрических дифференциальных операторов первого порядка.

Результаты С.Моравец и К.Фридрихса получили свое продолжение в работе П.Лакса и Р.Филлипса [21], которые показали, что слабое решение, полученное С.Моравец, является также и сильным решением.

В дальнейшем функциональная методика доказательства существования слабых решений задачи Трикоми была разработана Ю.М.Березанским [22]–[23], который получил энергетические неравенства, дающие оценки в других нормах и для уравнений более общих, чем уравнение Чаплыгина.

Последующее развитие краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа происходило по следующим основным направлениям:

- рассмотрение более общих уравнений смешанного типа;
- изучение новых краевых условий и областей, в которых ищется решение, и получающихся в результате этого новых краевых задач;
- поиск решений задач в различных классах функций.

Среди предложенных и изученных новых уравнений смешанного типа следует, прежде всего, отметить уравнения второго рода, изучавшиеся начиная с работ И.Л.Кароля [24] – [25], в которых были рассмотрены краевые задачи для уравнений

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y |y|^m u_{yy} = 0, \quad (0 < m < 1),$$

$$u_{xx} + y u_{yy} + a u_y = 0, \quad (a = \text{const}).$$

Кроме того, изучались уравнения старших порядков. Здесь следует отметить работы М.М.Смирнова [26] для уравнения четвертого порядка, В.И.Жегалова [27] для уравнения n -го порядка, М.С.Салахитдинова [28] для уравнения третьего порядка.

Уравнения смешанно-составного типа, уравнения с двумя линиями вырождения рассматривались в работах М.С.Салахитдинова [28], Т.Д.Джураева [29], многомерные уравнения изучались в работах А.В.Бицадзе [30] – [31], С.П.Пулькина [32], В.Н.Врагова [33].

Уравнения смешанного типа со спектральным параметром были изучены в работах Т.Ш.Кальменова [34], С.М.Пономарева [35] – [36] и Е.И.Моисеева [37] – [38].

Следующим направлением дальнейшего развития краевых задач для уравнений смешанного типа явилось рассмотрение различных областей и краевых задач. Наряду с поставленной выше задачей Трикоми, был исследован ряд других задач.

Задача Геллерстедта для уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (m > 0) \tag{1.9}$$

рассматривается в области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y > 0$ простой дугой Жордана σ с концами в точках $A_1(-1,0)$, $A_2(1,0)$, а при $y < 0$ - характеристиками $A_1C: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1$ и $A_2C: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ уравнения (1.9). Из произвольной точки $A(x_0, 0)$ отрезка A_1A проводятся характеристики AC_1 и AC_2 уравнения (1.9).



11

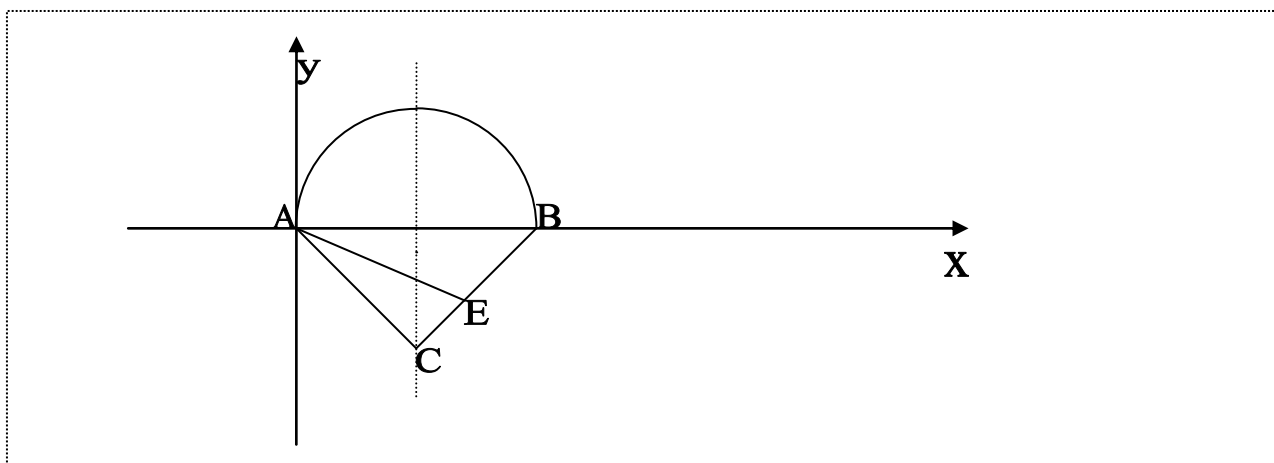


Рисунок 1.3 – Постановка обобщенной задачи Трикоми

Обобщенная задача Трикоми была подробно изучена в работах Ф.И.Франкля [39]–[40], А.В.Бицадзе [12], М.Проттера [41], В.П.Михайлова [42], В.В.Коврижкина [43], А.П.Солдатов [44], В.Н.Врагова [33].

Задача Франкля ставится следующим образом. Рассматривается уравнение Чаплыгина (1.7) и область $\Omega \subset R^2$, ограниченная отрезком $A'A$ оси $x=0$, где $A'(0,-1)$, $A(0,1)$; гладкой кривой σ , лежащей в верхней полуплоскости и имеющей концы в точках A и $B(a,0)$, характеристикой $A'C$ уравнения (7), где $C(a_1,0)$, причем $a_1 \leq a$ и отрезком CB оси x .

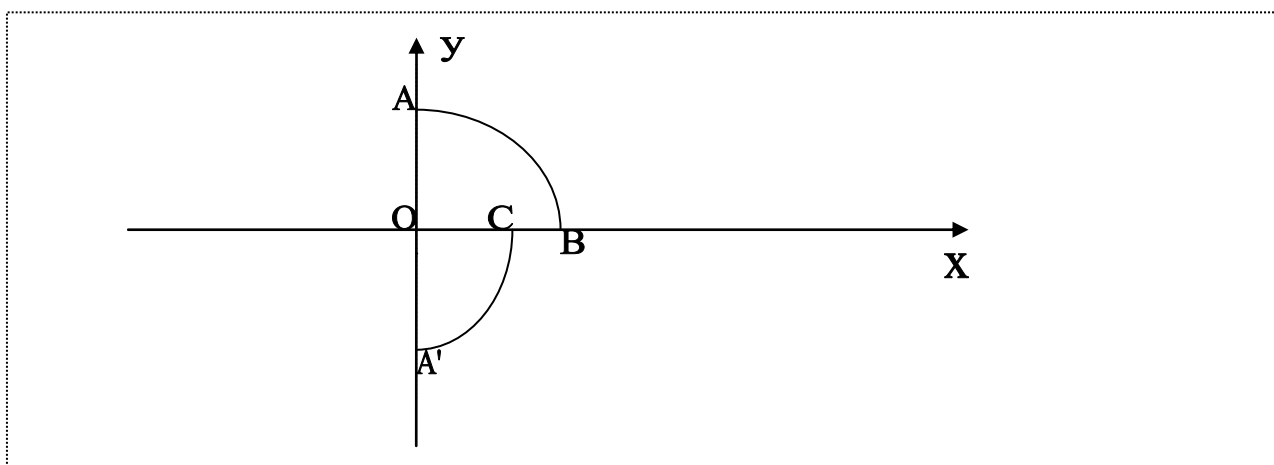


Рисунок 1.4 – Постановка задачи Франкля

Задача Франкля заключается в нахождении решения $u(x,y)$ уравнения (7), непрерывного в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяющего граничным условиям:

$$u|_{\sigma} = \phi_1(x,y),$$

$$u|_{CB} = \phi_2(x),$$

$$u_x|_{A'A} = 0,$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y).$$

Задаче Франкля посвящены работы Ф.И.Франкля [45], А.В.Бицадзе [46] – [47], Ю.В.Девингталя [48].

Кроме того, был предложен и изучен целый ряд других задач, в частности, задача со смещением, в которой, вместо условия (1.3), на характеристике AC в гиперболической части области ставится условие связывающее между собой значения функции на характеристиках AC и BC ; а также задача типа Бицадзе – Самарского, в которой роль условия в гиперболической части области выполняет соотношение между значением функции на одной из характеристик и на линии изменения типа – отрезке AB – являющимся внутренним по отношению к области Ω . Изучался и ряд других задач. В контексте данных задач также изучался вопрос о корректной постановке задач для уравнений смешанного типа, а именно, какими должны быть краевые условия и в каком классе нужно искать решение, чтобы соответствующая краевая задача была корректно поставленной. Этим вопросам посвящены работы В.Ф.Волкова [49], А.М.Нахушева [50], А.В.Бицадзе и А.М.Нахушева [51].

Наконец, еще одним направлением, по которому происходило развития краевых задач для уравнений смешанного типа, явилось введение различных классов решений соответствующих краевых задач, то есть указание того, в каком смысле искомая функция является решением уравнения и удовлетворяет граничным условиям.

Под регулярным (или классическим) решением, скажем, задачи Трикоми для уравнения Трикоми (задачи (1.1) – (1.3)) понимается такая функция $u(x, y)$, что:

- $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$;
- $u(x, y) \in C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ и удовлетворяет уравнению (1.1) соответственно в областях Ω^+ и Ω^- ;
- функции $v(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y$ и $\tau'(x)$, где $\tau(x) = u(x, 0)$, являются непрерывно дифференцируемыми в $(0, 1)$, причем $v(x)$ на концах этого интервала может обращаться в бесконечность порядка не выше $\frac{5}{6}$.

Обобщенным решением уравнения (1.1) в области Ω называется функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$;
- $u(x, y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+ ;
- для любого $x \in (0, 1)$ существует $\lim_{y \rightarrow 0} u_y(x, y) = v(x)$;
- в области Ω^- $u(x, y)$ представима в виде

$$u(\xi_0, \eta_0) = \gamma_1 \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \cdot \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{\frac{2}{3}} d\xi}{(\eta_0 - \xi)^{\frac{5}{6}} (\xi - \xi_0)^{\frac{5}{6}}} - \gamma_2 \int_{\xi_0}^{\eta_0} \frac{v(\xi) d\xi}{(\eta_0 - \xi)^{\frac{1}{6}} (\xi - \xi_0)^{\frac{1}{6}}},$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}, \quad \xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},$$

$\Gamma(z)$ - гамма-функция;

то есть $u(x, y)$ является решением задачи Коши в гиперболической части с начальными данными $v(x) = \lim_{y \rightarrow 0} u_y$ и $\tau(x) = u(x, 0)$.

Гладким решением $u(x, y)$ задачи Трикоми называется решение из класса $u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее неоднородному уравнению и однородным краевым условиям.

Функция $u(x, y)$ называется сильным решением задачи Трикоми (задачи (1.1) – (1.3)), если существует последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n \in W$ таких, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f , где Lu_n - оператор, соответствующий уравнению (1.1), а W - множество функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.2) и (1.3) и принадлежащих пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$.

Наконец, слабым решением задачи (1.1) – (1.3) называется такая функция $u(x, y) \in L_2(\Omega)$, которая удовлетворяет краевым условиям (1.2) – (1.3) и соотношению

$$(f(x), v(x))_{L_2(\Omega)} = (u(x), L^*v(x))_{L_2(\Omega)}$$

для любой функции $v(x)$ из области определения оператора L^* , сопряженного к оператору L , порожденному уравнением (1.1).

Отметим, что большинство из упомянутых выше работ было посвящено нахождению регулярных решений задач.

Обобщенные решения изучались в работах К.И.Бабенко [15], Л.В.Овсянникова [52]. Слабым и сильным решениям посвящены уже упоминавшиеся работы С.Моравец [19], К.Фридрихса [20], П.Лакса и Р.Филлипса [21], Ю.М.Березанского [22] – [23]. Вопросы существования гладкого и сильного решений задачи Трикоми рассматривались в работах К.И.Бабенко [53], Н.Г.Сорокиной [54], В.В.Коврижкина [43].

Изучение краевых задач для уравнений смешанного типа приближенными методами проводилось в работах З.И.Халилова [55], В.Г.Карманова [56] – [57], О.А.Ладыженской [58], Е.А.Волкова [59], Х.Огавы [60], Л.И.Коваленко [61] – [62].

Отметим, что результаты, наиболее близкие к нашим результатам, а иногда являющиеся их непосредственными предшественниками, получены в работах Т.Ш.Кальменова и А.Б.Базарбекова [63] – [66], в которых изучены

вопросы существования гладкого и сильного решений задачи Трикоми для уравнений Лаврентьева-Бицадзе и Геллерстедта.

Хотелось бы заметить, что приведенный обзор результатов вовсе не является полным и продиктован стремлением сохранить в качестве стержневого направления изучение задачи Трикоми для уравнений Лаврентьева-Бицадзе и Геллерстедта. В то же время, даже простое перечисление всех значимых результатов в области исследования краевых задач для уравнений смешанного типа является делом заведомо неблагодарным, ввиду обилия отдельных ученых и целых научных школ, занимавшихся и занимающихся в данном направлении. Очевидно и то, что и у указанных выше авторов, помимо перечисленных результатов, имеются и другие работы по этой тематике. Отметим, что достаточно полная библиография и основные полученные результаты приведены в работах А.В.Бицадзе [67] – [68], М.М.Смирнова [69] – [70]; для уравнений смешанно-составного типа – в работах М.С.Салахитдинова [28], Т.Д.Джураева [29]; для уравнений смешанного типа со спектральным параметром – в монографии Е.И.Моисеева [71]. Каждая из этих работ, написанная как научная монография, на сегодняшний день стала, по сути дела, классическим учебником.

Краевые задачи для уравнений смешанного типа активно изучались и в работах казахстанских математиков. Прежде всего, необходимо отметить работу Т.Ш.Кальменова [34], с которой началось бурное изучение спектральных вопросов задачи Трикоми.

В работе Т.Ш.Кальменова и М.О.Отелбаева [72] для уравнения Лаврентьева-Бицадзе впервые были применены методы регулярных расширений (с ограниченными обратными) некоторых «минимальных» линейных операторов в гильбертовом пространстве, что впоследствии вылилось в теорию корректных сужений и расширений дифференциальных операторов.

В уже упомянутых работах Т.Ш.Кальменова и А.Б.Базарбекова [63] – [66] были установлены достаточные условия гладкости решения задачи Трикоми для уравнений Лаврентьева-Бицадзе и Геллерстедта, а также доказаны критерии сильной разрешимости этой же задачи для обоих уравнений.

В работе Н.О.Егисбаева [73] была доказана сильная и полусильная разрешимость обобщенной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и ее сопряженной задачи.

В работах Н.Е.Ержанова [74], М.А.Садыбекова [75] был доказан критерий сильной разрешимости одного класса краевых задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области с отходом от характеристики. Была установлена зависимость корректности этих задач как от углов подхода эллиптической части границы к линии изменения типа уравнения, так и от геометрических характеристик гиперболической части области. При этом класс гладкости решений и количество краевых условий исходной и сопряженной задачи не совпадают.

В работе А.Ш.Аймахановой [76] были доказаны критерии сильной разрешимости задачи Трикоми и краевой задачи со смещением для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в пространствах L_p .

М.А.Джаманкараева [77] изучала корректность квазирегулярной задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе и ее сопряженной, а также их спектральные вопросы.

В настоящей работе будут изучены вопросы существования разрывных решений однородной задачи Трикоми для уравнений Лаврентьева-Бицадзе и Геллерстедта в случае широкого класса контуров.

2 Однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной: при $y < 0$ - характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2.1)$$

а при $y > 0$ - кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad y > 0 \right\},$$

рассматривается задача Трикоми: найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее краевому условию

$$u|_{AC \cup \sigma_\delta} = 0, \quad (2.2)$$

причем должны выполняться следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0). \quad (2.3)$$

Геометрически область Ω представляет собой фигуру (так называемый «парашют»), ограниченную снизу двумя отрезками характеристик AC и BC , а сверху – частью окружности с центром в точке $D\left(\frac{1}{2}, -\delta\right)$, заключенной между точками $A(0,0)$ и $B(1,0)$.

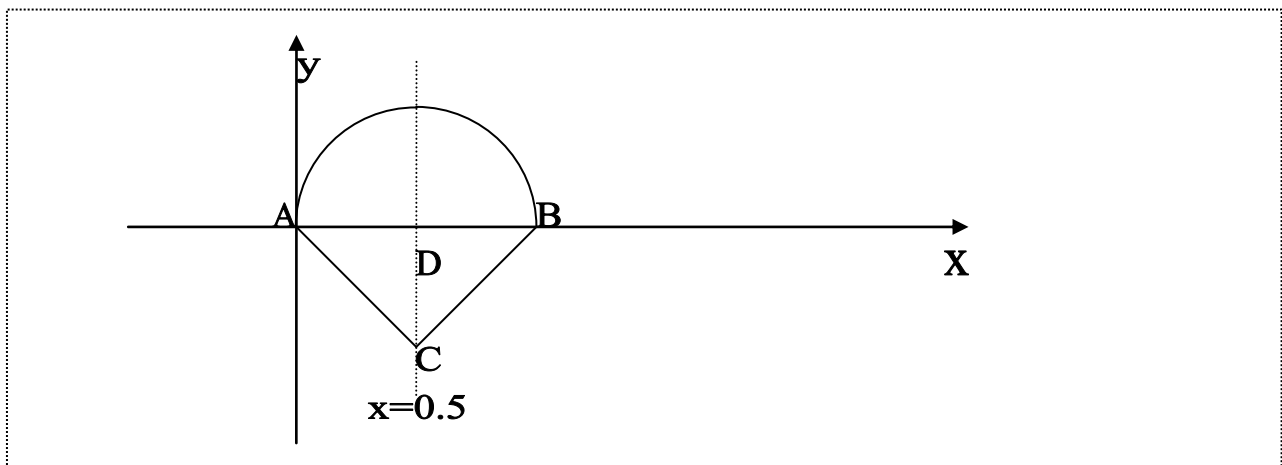


Рисунок 2.1 – Область Ω .

При этом в случае $\delta < 0$ центр окружности лежит выше оси абсцисс, а кривая σ_δ представляет собой большую часть окружности; при $\delta = 0$ центр окружности

лежит на оси абсцисс, а кривая σ_δ является половиной окружности. Наконец, при $\delta > 0$ центр окружности лежит ниже оси абсцисс, а кривая σ_δ представляет собой меньшую часть окружности.

Нетрудно видеть, что при $\delta < 0$ угол подхода кривой Ляпунова σ_δ к линии изменения типа уравнения $\{y=0\}$, то есть угол γ_δ , образованный касательной к кривой σ_δ в точках A или B и самим отрезком AB , больше $\frac{\pi}{2}$, при $\delta = 0$ этот угол равен $\frac{\pi}{2}$, а при $\delta > 0$ этот же угол меньше $\frac{\pi}{2}$.

Из определения кривой σ_δ находим

$$y = -\delta \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \delta^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2},$$

откуда

$$y' = \pm \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \delta^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}},$$

следовательно

$$y'(x=0) = \pm \frac{1}{2|\delta|}, \quad y'(x=1) = \pm \frac{1}{2|\delta|}.$$

Принимая во внимание, что значение производной в точке $x = x_0$ является тангенсом угла наклона касательной к графику функции, проведенной в этой точке, к положительному направлению оси Ox , а также учитывая сказанное выше относительно γ_δ , можно дать следующее определение угла подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения:

$$\gamma_\delta = \text{arcctg} 2\delta, \quad 0 < \gamma_\delta < \pi. \quad (2.4)$$

Действительно, при $\delta > 0$ $0 < \gamma_\delta < \frac{\pi}{2}$; при $\delta = 0$ $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$; если же $\delta < 0$, то $\frac{\pi}{2} < \gamma_\delta < \pi$. При этом угол наклона касательной к кривой σ_δ к положительному направлению оси Ox в точке A равен γ_δ , а в точке B равен $\pi - \gamma_\delta$.

Очевидно, в силу однородности соотношений (2.1)-(2.3), что функция $u \equiv 0$ будет решением задачи (2.1)-(2.2), причем выполнены условия (2.3). В силу принципа экстремума [8], решение задачи Трикоми своего положительного максимума или отрицательного минимума может достигать только на кривой σ_δ . Из этого принципа экстремума сразу следует

единственность решения задачи Трикоми, следовательно, $u \equiv 0$ будет единственным решением.

Однако, принцип экстремума и вытекающая из него единственность решения устанавливались, в частности, в классе функций, непрерывных в $\bar{\Omega}$. В случае же функций, разрывных в $\bar{\Omega}$, единственность решения, вообще говоря, не имеет места.

Нашей дальнейшей целью является нахождение разрывных решений задачи Трикоми и их анализ.

Обозначим

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (2.5)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x). \quad (2.6)$$

Отметим общий ход решения задачи Трикоми. Сначала решаем в гиперболической части области Ω^- задачу Коши-Гурса (Дарбу), считая как бы известной функцию $\nu(x)$. В результате получим решение $u(x, y)$, полагая в котором $y = 0$, найдем соотношение между функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$, которое является эквивалентным условию $u|_{AC} = 0$ в гиперболической части области.

Иными словами, вместо условия в гиперболической части области мы получаем эквивалентное ему условие на границе между гиперболической и эллиптической частями области. В результате мы решаем обычную краевую задачу для эллиптического уравнения с двумя краевыми условиями. Затем по полученному решению в эллиптической части области останется лишь восстановить решение и в гиперболической ее части.

2.1 Установление общей формы разрывных решений

В гиперболической части области Ω^- рассмотрим задачу Коши-Гурса (Дарбу), которая получается из задачи (2.1)-(2.3) с учетом соотношения (2.6):

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad (2.7)$$

$$u|_{AC} = 0, \quad (2.8)$$

$$u_y|_{AB} = \nu(x). \quad (2.9)$$

В характеристических переменных

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y \end{cases}$$

задачу Дарбу можно записать следующим образом

$$u_{1\xi\eta} = 0, \quad (2.10)$$

$$u_1|_{\xi=0} = 0, \quad (2.11)$$

$$(u_{1\xi} - u_{1\eta})|_{\xi=\eta} = v(\xi), \quad (2.12)$$

где

$$u_1(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right). \quad (2.13)$$

Общее решение уравнения (2.10) запишется в виде

$$u_1 = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Учитывая краевое условие (2.11), получим

$$u_1|_{\xi=0} = \varphi(0) + \psi(\eta) = 0 \Rightarrow \psi(\eta) = -\varphi(0) \Rightarrow u_1 = \varphi(\xi) - \varphi(0) = \int_0^\xi \varphi_t(t) dt.$$

Учитывая краевое условие (2.12), имеем

$$(u_{1\xi} - u_{1\eta})|_{\xi=\eta} = ((\varphi_\xi(\xi) - \varphi_\xi(0)) - (\varphi_\eta(\xi) - \varphi_\eta(0)))|_{\xi=\eta} = \varphi_\xi(\xi) = v(\xi),$$

откуда, с учетом соотношения (2.12),

$$u_1(\xi, \eta) = \int_0^\xi v(t) dt \quad \text{или} \quad u(x, y) = \int_0^{x+y} u_y(t, 0) dt = \int_0^{x+y} v(t) dt. \quad (2.14)$$

На линии изменения типа уравнения $\{y=0\}$ имеем

$$u(x, 0) \equiv \tau(x) = \int_0^x u_y(t, 0) dt \quad \text{или} \quad \tau(x) = \int_0^x v(t) dt. \quad (2.15)$$

Таким образом, соотношение (2.15) представляет собой условие, эквивалентное гиперболической части условия (2).

В эллиптической части Ω^+ рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2.16)$$

удовлетворяющее, в силу эллиптической части краевого условия (2.2) и полученному соотношению (2.15), краевым условиям

$$u|_{\sigma_\delta} = 0, \quad (2.17)$$

$$u(x, 0) = \int_0^x u_y(t, 0) dt. \quad (2.18)$$

Сделаем следующую замену переменных

$$\begin{cases} 1-x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (2.19)$$

откуда

$$\begin{cases} x = 1 - r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{1-x}, \end{cases} \quad (2.19^*)$$

а также замену функции

$$u_2(r, \varphi) = u(1 - r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (2.20)$$

В результате получим последовательно:

$$r_x = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \cdot 2(1-x) \cdot (-1) = -\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} = -\frac{r \cos \varphi}{r} = -\cos \varphi;$$

$$r_y = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi;$$

$$\begin{aligned} r_{xx} &= -\frac{(-1) \cdot \sqrt{(1-x)^2 + y^2} - (1-x) \cdot \frac{-(1-x)}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}}{(1-x)^2 + y^2} = -\frac{-r + \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - r^2 \cos^2 \varphi}{r^3} = \\ &= \frac{1 - \cos^2 \varphi}{r} = \frac{\sin^2 \varphi}{r}; \end{aligned}$$

$$r_{yy} = \frac{1 \cdot \sqrt{(1-x)^2 + y^2} - y \cdot \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}}{(1-x)^2 + y^2} = -\frac{r - \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - r^2 \sin^2 \varphi}{r^3} = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{r} = \frac{\cos^2 \varphi}{r};$$

$$\varphi_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1-x)^2}} \cdot y \cdot \frac{(-1)}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + y^2} \cdot \frac{y}{(1-x)^2} = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2} = \frac{r \sin \varphi}{r^2} = \frac{\sin \varphi}{r};$$

$$\varphi_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + y^2} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r};$$

$$\varphi_{xx} = y \cdot \frac{(-1)}{\left((1-x)^2 + y^2\right)^2} \cdot 2(1-x) \cdot (-1) = \frac{2(1-x)y}{\left((1-x)^2 + y^2\right)^2} = \frac{2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi}{r^4} = \frac{\sin 2\varphi}{r^2};$$

$$\varphi_{yy} = (1-x) \cdot \frac{(-1)}{\left((1-x)^2 + y^2\right)^2} \cdot 2y = -\frac{2(1-x)y}{\left((1-x)^2 + y^2\right)^2} = -\frac{2r \sin \varphi \cdot r \cos \varphi}{r^4} = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2};$$

$$u_x = u_{2r} \cdot r_x + u_{2\varphi} \cdot \varphi_x = -\cos \varphi \cdot u_{2r} + \frac{\sin \varphi}{r} \cdot u_{2\varphi};$$

$$u_y = u_{2r} \cdot r_y + u_{2\varphi} \cdot \varphi_y = \sin \varphi \cdot u_{2r} + \frac{\cos \varphi}{r} \cdot u_{2\varphi};$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{2r} \cdot r_{xx} + u_{2rr} \cdot (r_x)^2 + 2u_{2r\varphi} \cdot r_x \cdot \varphi_x + u_{2\varphi} \cdot \varphi_{xx} + u_{2\varphi\varphi} \cdot (\varphi_x)^2 = \\ &= \frac{\sin^2 \varphi}{r} \cdot u_{2r} + \cos^2 \varphi \cdot u_{2rr} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} u_{2r\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= u_{2r} \cdot r_{yy} + u_{2rr} \cdot (r_y)^2 + 2u_{2r\varphi} \cdot r_y \cdot \varphi_y + u_{2\varphi} \cdot \varphi_{yy} + u_{2\varphi\varphi} \cdot (\varphi_y)^2 = \\ &= \frac{\cos^2 \varphi}{r} \cdot u_{2r} + \sin^2 \varphi \cdot u_{2rr} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} u_{2r\varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= \frac{\sin^2 \varphi}{r} \cdot u_{2r} + \cos^2 \varphi \cdot u_{2rr} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} u_{2r\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi\varphi} + \\ &+ \frac{\cos^2 \varphi}{r} \cdot u_{2r} + \sin^2 \varphi \cdot u_{2rr} + \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{r} u_{2r\varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi\varphi} = \\ &= \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{r} \cdot u_{2r} + (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cdot u_{2rr} + \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{r^2} \cdot u_{2\varphi\varphi} = \\ &= u_{2rr} + \frac{1}{r} u_{2r} + \frac{1}{r^2} u_{2\varphi\varphi}; \end{aligned}$$

иными словами, уравнение (2.16) запишется как

$$u_{2rr} + \frac{1}{r} u_{2r} + \frac{1}{r^2} u_{2\varphi\varphi} = 0 \quad \text{или} \quad r^2 u_{2rr} + r u_{2r} + u_{2\varphi\varphi} = 0.$$

Запишем теперь контур σ_δ в новых переменных r, φ .

$$\begin{aligned}
 \sigma_\delta : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \delta)^2 &= \frac{1}{4} + \delta^2 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y\delta + \delta^2 = \frac{1}{4} + \delta^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x^2 - x + y^2 + 2y\delta &= 0 \Rightarrow 2y\delta = x - x^2 - y^2 \Rightarrow 2y\delta = -1 + 2x - x^2 - y^2 + 1 - x \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2y\delta &= -(1-x)^2 - y^2 + (1-x) \Rightarrow 2y\delta = (1-x) - (1-x)^2 - y^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2r \sin \varphi \cdot \delta &= r \cos \varphi - r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow 2\delta \sin \varphi \cdot r = r \cos \varphi - r^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2\delta \sin \varphi &= \cos \varphi - r \Rightarrow r = \cos \varphi - 2\delta \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Таким образом, условие (2.17) в результате замен (2.19)-(2.20) запишется в виде:

$$u_2(r, \varphi)|_{r=\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} = 0.$$

Наконец, запишем в новых переменных r, φ краевое условие (2.18).

$$u(x, 0) = \int_0^x u_y(t, 0) dt;$$

$$\begin{cases} 1-x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{1-x}; \end{cases}$$

$$r_y = \frac{1}{2\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi;$$

$$\varphi_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + y^2} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r};$$

$$u(x, y) = u(1 - r \cos \varphi, r \sin \varphi) = u_2(r, \varphi) = u_2\left(\sqrt{(1-x)^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{1-x}\right);$$

$$u_y(x, y) = u_{2r}(r, \varphi) \cdot r_y + u_{2\varphi}(r, \varphi) \cdot \varphi_y = \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \cdot u_{2r}(r, \varphi) + \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} \cdot u_{2\varphi}(r, \varphi) =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \cdot u_{2r}\left(\sqrt{(1-x)^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{1-x}\right) + \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} \cdot u_{2\varphi}\left(\sqrt{(1-x)^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{1-x}\right);$$

$$u(x,0) = u_2(1-x,0);$$

$$u_y(x,0) = 0 + \frac{1}{1-x} u_{2\varphi}(1-x,0);$$

$$\int_0^x u_y(t,0) dt = \int_0^x \frac{u_{2\varphi}(1-t,0)}{1-t} dt = \left| \begin{array}{l} 1-t = p; \quad t=0 \Rightarrow p=1 \\ dt = -dp; \quad t=x \Rightarrow p=1-x \end{array} \right| = - \int_1^{1-x} \frac{u_{2\varphi}(p,0)}{p} dp = \int_{1-x}^1 \frac{u_{2\varphi}(p,0)}{p} dp$$

.

Таким образом, краевое условие (2.18) запишется в виде:

$$u_2(1-x,0) = \int_{1-x}^1 \frac{u_{2\varphi}(p,0)}{p} dp,$$

или, заменяя $1-x$ на r , в виде

$$u_2(r,0) = \int_r^1 \frac{u_{2\varphi}(p,0)}{p} dp.$$

В итоге, в результате замен переменных и функции (2.19)-(2.20) задача (2.16)-(2.18) запишется следующим образом.

$$r^2 u_{2rr} + r u_{2r} + u_{2\varphi\varphi} = 0, \quad (2.21)$$

$$u_2(r, \varphi) \Big|_{r=\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} = 0, \quad (2.22)$$

$$u_2(r,0) = \int_r^1 \frac{u_{2\varphi}(p,0)}{p} dp. \quad (2.23)$$

Будем искать решение уравнения (2.21) в виде

$$u_2(r, \varphi) = r^k \cdot \Phi(\varphi),$$

где k - произвольное вещественное число.

Из уравнения (2.21) для определения функции $\Phi(\varphi)$ получим

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0,$$

откуда

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos k\varphi + c_2 \sin k\varphi.$$

Таким образом, всякая функция вида

$$u_2(r, \varphi) = r^k (C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi)$$

будет решением уравнения (2.21). Очевидно, так как k произвольно, то же относится и к отрицательным значениям k . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функции следующего вида

$$u_{2k}(r, \varphi) = r^{-k} (C_{1k} \cos k\varphi - C_{2k} \sin k\varphi) = \frac{C_{1k} \cos k\varphi - C_{2k} \sin k\varphi}{r^k}, \quad k \geq 0. \quad (2.24)$$

По сказанному выше, всякая функция вида (2.24) будет решением уравнения (2.21). В силу однородности и линейности уравнения (2.21), то же относится и к любой линейной комбинации функций вида (2.24). Таким образом, в общем виде, функция

$$u_2(r, \varphi) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{1k} \cos k\varphi - C_{2k} \sin k\varphi}{r^k} \quad (2.25)$$

будет решением уравнения (2.21).

Подставив функцию (2.25) в краевое условие (2.23), получим:

$$u_2(r, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{1k}}{r^k} = C_{10} + \frac{C_{11}}{r} + \frac{C_{12}}{r^2} + \dots + \frac{C_{1n}}{r^n} = C_{10} + \sum_{k=1}^n \frac{C_{1k}}{r^k};$$

$$u_{2\varphi}(r, \varphi) = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{-C_{1k} \sin k\varphi - C_{2k} \cos k\varphi}{r^k} = \left| \begin{array}{l} \text{т.к. первый член ряда} \\ \text{равен 0 из-за } k=0 \end{array} \right| = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{-C_{1k} \sin k\varphi - C_{2k} \cos k\varphi}{r^k};$$

$$u_{2\varphi}(r, 0) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{-C_{2k}}{r^k};$$

$$\int_r^1 \frac{u_{2\varphi}(p, 0)}{p} dp = \int_r^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{-C_{2k} \cdot k}{p^{k+1}} \right) dp = \sum_{k=1}^n \left(\int_1^r \frac{-C_{2k} \cdot k}{p^{k+1}} dp \right) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{C_{2k}}{p^k} \right) \Big|_r^1 = \sum_{k=1}^n C_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{C_{2k}}{r^k};$$

таким образом,

$$C_{10} + \sum_{k=1}^n \frac{C_{1k}}{r^k} = \sum_{k=1}^n C_{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{C_{2k}}{r^k} \Rightarrow \begin{cases} C_{2k} = -C_{1k}, & k = 1, 2, \dots, n, \\ C_{10} - \sum_{k=1}^n C_{2k} = 0 \Rightarrow C_{10} + \sum_{k=1}^n C_{1k} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, условие (2.23) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{cases} C_{2k} = -C_{1k}, & k=1,2,\dots,n, \\ \sum_{k=0}^n C_{1k} = 0. \end{cases}$$

В итоге, с учетом соотношения (2.25), получим, что функция

$$u_2(r, \varphi) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{1k} \cos k\varphi + C_{1k} \sin k\varphi}{r^k} = \sum_{k=0}^n \frac{C_k}{r^k} (\cos k\varphi + \sin k\varphi), \quad (2.26)$$

где

$$\sum_{k=0}^n C_k = 0, \quad (2.27)$$

будет решением уравнения (2.21), удовлетворяющим краевому условию (2.23).

Таким образом, нам осталось лишь таким образом подобрать n и значения произвольных постоянных C_k , чтобы соблюсти условие (2.27), а функция (2.26) удовлетворяла бы условию (2.22).

2.2 Рассмотрение частных случаев контуров

Поступим следующим образом. Будем полагать последовательно $n=1,2,\dots$ в формуле (2.26) и находить такие значения δ и постоянные C_k , при которых формула (2.26) удовлетворяет условию (2.22), с тем, чтобы выявить общую закономерность и найти решение задачи (2.21)-(2.23) для контура σ_δ с произвольным δ .

1) $n=1$

Из формулы (2.26) получим

$$u_2(r, \varphi) = C_0 + C_1 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{r}.$$

Поскольку контур σ_δ записывается в виде $r = \cos \varphi - 2\delta \sin \varphi$, то из соотношения (2.22) получим:

$$u_2|_{\sigma_\delta} = C_0 + C_1 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} = \frac{C_0 \cos \varphi - 2\delta C_0 \sin \varphi + C_1 \cos \varphi + C_1 \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 = 0, \\ -2\delta C_0 + C_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -C, \\ -2\delta C - C = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -C, \\ 2\delta + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -C, \\ \delta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, функция

$$u_2(r, \varphi) = C \left(1 - \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{r} \right)$$

удовлетворяет задаче (2.21)-(2.23) для $\delta = -\frac{1}{2}$. При этом заметим, что соотношение (2.27) выполнилось автоматически при выполнении условия (2.22).

Переходя от переменных r, φ к переменным x, y по формулам (2.19), (2.19*) и (2.20), получим

$$u(x, y) = C \left(1 - \frac{\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \right) = C \left(1 - \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} \right) = -C \left(\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right).$$

Последняя формула дает представление решения в эллиптической части области для $\delta = -\frac{1}{2}$. Для нахождения решения в гиперболической части области воспользуемся соотношением (2.14).

$$u(x, y) = C \left(1 - \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} \right) \Rightarrow u_y(x, y) = C \left(0 - \frac{1 \cdot ((1-x)^2 + y^2) - (1-x+y) \cdot 2y}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_y(x, 0) = -C \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^4} = -\frac{C}{(1-x)^2};$$

$$u(x, y) = \int_0^{x+y} u_y(t, 0) dt = \int_0^{x+y} \frac{-C}{(1-t)^2} dt = -\frac{C}{1-t} \Big|_0^{x+y} = -C \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right).$$

Таким образом, представление решения в гиперболической части области:

$$u(x, y) = -C \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right) = -C \cdot \frac{x+y}{1-x-y}.$$

В итоге, для кривой Ляпунова

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}, \quad y > 0 \right\} \quad (2.28)$$

решение исходной задачи (2.1)-(2.3) примет следующий вид

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2} - 1 = \frac{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2+y^2}, & y > 0, \\ \frac{1}{1-x-y} - 1 = \frac{x+y}{1-x-y}, & y < 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

(В силу однородности и линейности задачи (2.1)-(2.3), данное решение можно умножить или разделить на любое действительное число $C \neq 0$).

Проверим тот факт, что функция (2.29) будет решением задачи (2.1)-(2.3) для контура (2.28).

а) при $y < 0$ уравнение (2.1) примет вид

$$-u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.29) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{x+y}{1-x-y} = \frac{1}{1-x-y} - 1,$$

получим

$$u_x = \left((1-x-y)^{-1} - 1 \right)_x = -1 \cdot (1-x-y)^{-2} \cdot (-1) - 0 = (1-x-y)^{-2},$$

$$u_{xx} = -2 \cdot (1-x-y)^{-3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x-y)^3},$$

$$u_y = \left((1-x-y)^{-1} - 1 \right)_y = -1 \cdot (1-x-y)^{-2} \cdot (-1) - 0 = (1-x-y)^{-2},$$

$$u_{yy} = -2 \cdot (1-x-y)^{-3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x-y)^3}.$$

В итоге,

$$u_{xx} - u_{yy} = \frac{2}{(1-x-y)^3} - \frac{2}{(1-x-y)^3} = 0,$$

так как $1-x-y \neq 0 \Leftrightarrow x+y \neq 1$ в Ω^- , то есть функция (2.29) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y < 0$.

При $y > 0$ уравнение (2.1) примет вид

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.29) при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2 + y^2} = \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} - 1,$$

получим

$$u_x = \frac{-1((1-x)^2 + y^2) - 2(1-x)(-1)(1-x+y)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \frac{-(1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)^2 + 2y(1-x)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2};$$

$$u_{xx} = \frac{(2(1-x)(-1) + 2y(-1))((1-x)^2 + y^2)^2 - 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2(1-x)(-1)((1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{-2(1-x+y)((1-x)^2 + y^2) + 4(1-x)((1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{-2(1-x)^3 - 2(1-x)y^2 - 2y(1-x)^2 - 2y^3 + 4(1-x)^3 + 8(1-x)^2 y - 4(1-x)y^2}{((1-x)^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{2(1-x)^3 + 6(1-x)^2 y - 6(1-x)y^2 - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3};$$

$$u_y = \frac{1((1-x)^2 + y^2) - 2y(1-x+y)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \frac{(1-x)^2 + y^2 - 2y(1-x) - 2y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \frac{(1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2};$$

$$u_{yy} = \frac{(-2(1-x) - 2y)((1-x)^2 + y^2)^2 - 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2y((1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{-2(1-x+y)((1-x)^2 + y^2) - 4y((1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{-2(1-x)^3 - 2(1-x)y^2 - 2y(1-x)^2 - 2y^3 - 4y(1-x)^2 + 8y^2(1-x) + 4y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{-2(1-x)^3 - 6(1-x)^2 y + 6(1-x)y^2 + 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}.$$

Таким образом,

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{2(1-x)^3 + 6(1-x)^2 y - 6(1-x)y^2 - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} + \frac{-2(1-x)^3 - 6(1-x)^2 y + 6(1-x)y^2 + 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = 0,$$

так как $((1-x)^2 + y^2)^3 \neq 0$ в Ω^+ , то есть функция (2.29) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y > 0$.

В итоге, функция (2.29) удовлетворяет уравнению (2.1) во всей области Ω .

б) Краевое условие (2.2) можно записать как

$$\begin{aligned} u|_{AC} = u|_{x+y=0} &= 0 && \text{- в гиперболической части } \Omega^-, \\ u|_{\sigma_\delta} = u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}} &= 0 && \text{- в эллиптической части } \Omega^+. \end{aligned}$$

Учитывая представление функции (2.29) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{x+y}{1-x-y} = \frac{x+y}{1-(x+y)},$$

получим

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = \frac{x+y}{1-(x+y)} \Big|_{x+y=0} = \frac{0}{1} = 0,$$

то есть функция (2.29) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2.2).

Из представления функции (2.29) при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2 + y^2},$$

имеем

$$u|_{\sigma_\delta} = u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2 + y^2} \Big|_{\frac{1}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0} = 0,$$

то есть функция (2.29) удовлетворяет и эллиптической части краевого условия (2.2). Таким образом, функция (2.29) удовлетворяет краевому условию (2.2).

в) Учитывая представление функции (2.29) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{1-x-y} - 1,$$

получим

$$u_y(x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^2},$$

откуда

$$u(x, -0) = \frac{1}{1-x} - 1,$$

$$u_y(x, -0) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Из представления функции (2.29) при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} - 1,$$

имеем

$$u_y(x, y) = \frac{(1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2},$$

отсюда

$$u(x, +0) = \frac{1-x}{(1-x)^2} - 1 = \frac{1}{1-x} - 1,$$

$$u_y(x, +0) = \frac{(1-x)^2}{((1-x)^2)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

В итоге,

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \frac{1}{1-x} - 1, \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

так как $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ при $x \in AB(0,1)$, то есть функция (2.29) удовлетворяет условиям склеивания (2.3).

В итоге, функция (2.29) является решением однородной задачи Трикоми (задачи (2.1)-(2.3)) для контура (2.28). Но, как легко видеть, функция (2.29) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контура (2.28), причем это решение представимо по формуле (2.229).*

2) $n = 2$

Из формулы (2.26) получим $u_2(r, \varphi) = C_0 + C_1 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{r} + C_2 \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{r^2}$.

Поскольку контур σ_δ записывается в виде $r = \cos \varphi - 2\delta \sin \varphi$, то из соотношения (2.22), с учетом формулы Муавра, получим:

$$\begin{aligned}
u_2|_{\sigma_\delta} &= C_0 + C_1 \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi} + C_2 \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{(\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi)^2} = \\
&= C_0 + C_1 \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi} + C_2 \frac{\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\varphi}{(\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi)^2} = \\
&= \frac{C_0(\cos^2\varphi - 4\delta\cos\varphi\sin\varphi + 4\delta^2\sin^2\varphi) + C_1(\cos^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi - 2\delta\cos\varphi\sin\varphi - 2\delta\sin^2\varphi)}{(\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi)^2} + \\
&\quad + \frac{C_2(\cos^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)}{(\cos\varphi - 2\delta\sin\varphi)^2} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 = 0, \\ -4\delta C_0 + C_1 - 2\delta C_1 + 2C_2 = 0, \\ 4\delta^2 C_0 - 2\delta C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 + C_2 = -C, \\ -4\delta C_0 + (1 - 2\delta)C_1 + 2C_2 = 0, \\ 4\delta^2 C_0 - 2\delta C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_2 = -C - C_1, \\ -4\delta C + (1 - 2\delta)C_1 - 2C - 2C_1 = 0, \\ 4\delta^2 C_0 - 2\delta C_1 - C_2 = 0, \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_2 = -C - C_1, \\ (-4\delta - 2)C + (-1 - 2\delta)C_1 = 0, \\ 4\delta^2 C_0 - 2\delta C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_2 = -C - C_1, \\ 2C + C_1 = 0, \\ 4\delta^2 C_0 - 2\delta C_1 - C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -2C, \\ C_2 = -C - C_1 = -C + 2C = C, \\ 4\delta^2 C - 2\delta \cdot (-2C) - C = 0, \end{cases} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -2C, \\ C_2 = C, \\ C(4\delta^2 + 4\delta - 1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -2C, \\ C_2 = C, \\ \delta_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом, функция

$$u_2(r, \varphi) = C \left(1 - 2 \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{r} + \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{r^2} \right)$$

удовлетворяет задаче (2.21)-(2.23) для $\delta_1 = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2}$ и $\delta_2 = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$. При этом заметим, что соотношение (2.27) выполнилось автоматически при выполнении условия (2.22), поскольку, как легко видеть, соотношение (2.27) совпадает с первым уравнением получающейся после приведения подобных системы.

Переходя от переменных r, φ к переменным x, y по формулам (2.19), (2.19*) и (2.20), получим с учетом формулы Муавра

$$\begin{aligned} u(x, y) &= C \left(1 - 2 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{r} + \frac{\cos^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi}{r^2} \right) = \\ &= C \left(1 - 2 \frac{\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{2(1-x)y}{(1-x)^2 + y^2} - \frac{y^2}{(1-x)^2 + y^2}}{(1-x)^2 + y^2} \right) = \\ &= C \left(1 - 2 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Последняя формула дает представление решения в эллиптической части области для $\delta_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ и $\delta_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. Для нахождения решения в гиперболической части области воспользуемся соотношением (2.14).

$$\begin{aligned} u(x, y) &= C \left(1 - 2 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_y(x, y) &= C \left(0 - 2 \cdot \frac{1 \cdot ((1-x)^2 + y^2) - (1-x+y) \cdot 2y}{((1-x)^2 + y^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2(1-x) - 2y) \cdot ((1-x)^2 + y^2)^2 - ((1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2) \cdot 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2y}{((1-x)^2 + y^2)^4} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_y(x, 0) &= C \left(-2 \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^4} + \frac{2(1-x)(1-x)^4}{(1-x)^8} \right) = C \left(\frac{-2}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^{x+y} u_y(t, 0) dt = C \int_0^{x+y} \left(\frac{-2}{(1-t)^2} + \frac{2}{(1-t)^3} \right) dt = C \left(\frac{-2}{(1-t)} + \frac{1}{(1-t)^2} \right) \Bigg|_0^{x+y} = \\ &= C \left(-\frac{2}{1-x-y} + \frac{1}{(1-x-y)^2} + 2 - 1 \right) = C \left(\frac{1}{(1-x-y)^2} - 2 \cdot \frac{1}{1-x-y} + 1 \right). \end{aligned}$$

Иными словами, мы получили представление решения в гиперболической части области. В итоге, для кривых Ляпунова

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)^2, \quad y > 0 \right\} \quad (2.30)$$

и

$$\sigma_2 = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2} \right)^2, \quad y > 0 \right\} \quad (2.30a)$$

решение исходной задачи (2.1)-(2.3) примет следующий вид

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - 2 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 1, & y > 0, \\ \frac{1}{(1-x-y)^2} - 2 \frac{1}{1-x-y} + 1 = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^2 = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^2, & y < 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

(В силу однородности и линейности задачи (2.1)-(2.3), решение (2.31) вновь дается с точностью до произвольной постоянной $C \neq 0$).

Проверим тот факт, что функция (2.31) будет решением задачи (2.1)-(2.3) для контуров (2.30) и (2.30a).

а) при $y < 0$ уравнение (2.1) примет вид

$$-u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.31) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^2} - 2 \frac{1}{1-x-y} + 1,$$

получим

$$\begin{aligned} u_x &= \left((1-x-y)^{-2} - 2(1-x-y)^{-1} + 1 \right)_x = -2(1-x-y)^{-3}(-1) - 2(-1)(1-x-y)^{-3}(-1) + 0 = \\ &= \frac{2}{(1-x-y)^3} - \frac{2}{(1-x-y)^2}, \end{aligned}$$

$$u_{xx} = 2(-3)(1-x-y)^{-4} \cdot (-1) - 2(-2)(1-x-y)^{-3} \cdot (-1) = \frac{6}{(1-x-y)^4} - \frac{4}{(1-x-y)^3},$$

$$u_y = -2(1-x-y)^{-3}(-1) - 2(-1)(1-x-y)^{-3}(-1) + 0 = \frac{2}{(1-x-y)^3} - \frac{2}{(1-x-y)^2},$$

$$u_{yy} = 2(-3)(1-x-y)^{-4} \cdot (-1) - 2(-2)(1-x-y)^{-3} \cdot (-1) = \frac{6}{(1-x-y)^4} - \frac{4}{(1-x-y)^3}.$$

В итоге,

$$u_{xx} - u_{yy} = \frac{6}{(1-x-y)^4} - \frac{4}{(1-x-y)^3} - \frac{6}{(1-x-y)^4} + \frac{4}{(1-x-y)^3} = 0,$$

так как $1-x-y \neq 0 \Leftrightarrow x+y \neq 1$ в Ω^- , то есть функция (2.31) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y < 0$.

При $y > 0$ уравнение (2.1) примет вид $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Учитывая представление функции (2.31) при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - 2 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 1,$$

получим

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(2(1-x)(-1) + 2y(-1))((1-x)^2 + y^2)^2 - 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2(1-x)(-1)((1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^4} - \\ &- 2 \frac{(-1)((1-x)^2 + y^2) - 2(1-x)(-1)(1-x+y)}{((1-x)^2 + y^2)^2} + 0 = \\ &= 2 \frac{-(1-x)^3 - (1-x)^2 y - (1-x)y^2 - y^3 + 2(1-x)^3 + 4(1-x)^2 y - 2(1-x)y^2}{((1-x)^2 + y^2)^3} - \\ &- 2 \frac{-(1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)^2 + 2y(1-x)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \\ &= 2 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - 2 \frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Учтем полученное в предыдущих выкладках соотношение

$$\left(\frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right)_x = \frac{2(1-x)^3 + 6(1-x)^2 y - 6(1-x)y^2 - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3},$$

получим

$$u_{xx} = 2 \frac{(-3(1-x)^2 - 6(1-x)y + 3y^2)((1-x)^2 + y^2)^3 + 6((1-x)^2 + y^2)^2 (1-x)((1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3)}{((1-x)^2 + y^2)^6} -$$

$$\begin{aligned}
& -2 \cdot 2 \cdot \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
& = 6 \frac{-(1-x)^4 - 2(1-x)^3 y + (1-x)^2 y^2 - (1-x)^2 y^2 - 2(1-x)y^3 + y^4 + 2(1-x)^4 + 6(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 2(1-x)y^3}{((1-x)^2 + y^2)^4} - \\
& - 4 \cdot \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
& = 6 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} - 4 \cdot \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Имеем далее

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{(2(1-x) - 2y)((1-x)^2 + y^2)^2 - 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2y((1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^4} - \\
& - 2 \frac{(1-x)^2 + y^2 - 2y(1-x+y)}{((1-x)^2 + y^2)^2} + 0 = 2 \frac{(1-x)^3 - (1-x)^2 y + (1-x)y^2 - y^3 - 2(1-x)^2 y - 4(1-x)y^2 + 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - \\
& - 2 \frac{(1-x)^2 + y^2 - 2(1-x)y - 2y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} = 2 \frac{(1-x)^3 - 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 + y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - 2 \frac{(1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}, \\
u_{yy} &= 2 \frac{(-3(1-x)^2 - 6(1-x)y + 3y^2)((1-x)^2 + y^2)^3 - 3((1-x)^2 + y^2)^2 \cdot 2y((1-x)^3 - 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 + y^3)}{((1-x)^2 + y^2)^6} - \\
& - 2 \cdot \frac{(-2(1-x) - 2y)((1-x)^2 + y^2)^2 - 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2y((1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
& = -6 \frac{(1-x)^4 + 2(1-x)^3 y - (1-x)^2 y^2 + (1-x)^2 y^2 + 2(1-x)y^3 - y^4 + 2(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 6(1-x)y^3 + 2y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} + \\
& + 4 \cdot \frac{(1-x)^3 + (1-x)^2 y + (1-x)y^2 + y^3 + 2(1-x)^2 y - 4(1-x)y^2 - 2y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
& = -6 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} + 4 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$u_{xx} + u_{yy} = 6 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} - 4 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} -$$

$$- 6 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} + 4 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = 0,$$

так как $((1-x)^2 + y^2) \neq 0$ в Ω^+ , то есть функция (2.31) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y > 0$.

В итоге, функция (2.31) удовлетворяет уравнению (1) во всей области Ω .

б) Краевое условие (2.2) можно записать как

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = 0 \quad - \text{ в гиперболической части } \Omega^-,$$

$$u|_{\sigma_\delta} = u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2} = 0 \quad - \text{ для контура } \sigma_1,$$

или

$$u|_{\sigma_\delta} = u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2} = 0 \quad - \text{ для контура } \sigma_2,$$

- в эллиптической части Ω^+ .

Учитывая представление функции (2.31) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^2} - 2 \frac{1}{1-x-y} + 1 = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1-1+x+y}{1-x-y} \right)^2 = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^2,$$

получим

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = \left(\frac{x+y}{1-(x+y)} \right)^2 \Big|_{x+y=0} = \left(\frac{0}{1-0} \right)^2 = 0,$$

то есть функция (2.31) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2.2).

Учитывая представление функции (2.31) при $y > 0$ и преобразовав его, получим

$$u(x, y) = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - 2 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 1 =$$

$$= \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y + y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - 2 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 1 - \frac{2y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-x+y)^2}{((1-x)^2+y^2)^2} - 2 \frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2} + 1 - \frac{2y^2}{((1-x)^2+y^2)^2} = \\
&= \left(\frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^2 - \frac{2y^2}{((1-x)^2+y^2)^2} = \left(1 - \frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2} \right)^2 - \frac{2y^2}{((1-x)^2+y^2)^2} = \\
&= \left(\frac{(1-x)^2+y^2-(1-x)-y}{(1-x)^2+y^2} \right)^2 - \frac{2y^2}{((1-x)^2+y^2)^2} = \frac{((1-x)^2+y^2-(1-x)-y)^2 - (\sqrt{2}y)^2}{((1-x)^2+y^2)^2} = \\
&= \frac{((1-x)^2+y^2-(1-x)-y-\sqrt{2}y)((1-x)^2+y^2-(1-x)-y+\sqrt{2}y)}{((1-x)^2+y^2)^2} = \\
&= \frac{((1-x)^2+y^2-(1-x)-(1+\sqrt{2})y)((1-x)^2+y^2-(1-x)+(\sqrt{2}-1)y)}{((1-x)^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Но, преобразовав выражения (2.30) и (2.30а) для контуров σ_1 и σ_2 , получим

$$\sigma_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + (\sqrt{2}-1)y + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + (\sqrt{2}-1)y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + (\sqrt{2}-1)y + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + y^2 - (1-x) + (\sqrt{2}-1)y = 0,$$

$$\sigma_2: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - (\sqrt{2}+1)y + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - (\sqrt{2}+1)y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - (\sqrt{2}+1)y + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (1+\sqrt{2})y = 0,$$

Следовательно,

$$u|_{\sigma_1} = \frac{((1-x)^2+y^2-(1-x)-(1+\sqrt{2})y)((1-x)^2+y^2-(1-x)+(\sqrt{2}-1)y)}{((1-x)^2+y^2)^2} \Bigg|_{(1-x)^2+y^2-(1-x)+(\sqrt{2}-1)y=0} = 0,$$

$$u|_{\sigma_2} = \frac{((1-x)^2+y^2-(1-x)-(1+\sqrt{2})y)((1-x)^2+y^2-(1-x)+(\sqrt{2}-1)y)}{((1-x)^2+y^2)^2} \Bigg|_{(1-x)^2+y^2-(1-x)-(1+\sqrt{2})y=0} = 0,$$

то есть функция (2.31) удовлетворяет и эллиптической части краевого условия (2.2), причем для обоих контуров σ_1 и σ_2 .

Таким образом, функция (2.31) удовлетворяет краевому условию (2.2) для обоих контуров σ_1 и σ_2 .

в) Учитывая представление функции (2.31) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^2} - 2\frac{1}{1-x-y} + 1,$$

получим

$$u_y(x, y) = \frac{2}{(1-x-y)^3} - \frac{2}{(1-x-y)^2},$$

откуда

$$u(x, -0) = \frac{1}{(1-x)^2} - 2\frac{1}{1-x} + 1,$$

$$u_y(x, -0) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Из представления функции (2.31) при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - 2\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 1,$$

имеем

$$u_y(x, y) = 2\frac{(1-x)^3 - 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 + y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - 2\frac{(1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2},$$

следовательно

$$u(x, +0) = \frac{(1-x)^2}{((1-x)^2)^2} - 2\frac{1-x}{(1-x)^2} + 1 = \frac{1}{(1-x)^2} - 2\frac{1}{1-x} + 1,$$

$$u_y(x, +0) = 2\frac{(1-x)^3}{((1-x)^2)^3} - 2\frac{(1-x)^2}{((1-x)^2)^2} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Таким образом,

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \frac{1}{(1-x)^2} - 2\frac{1}{1-x} + 1, \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{2}{(1-x)^2},$$

так как $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ при $x \in AB(0,1)$, то есть функция (2.31) удовлетворяет условиям склеивания (2.3).

В итоге, функция (2.31) является решением однородной задачи Трикоми (задачи (2.1)-(2.3)) для контуров (2.30) и (2.30а). Но, как легко видеть, функция (31) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, в данном пункте доказана следующая теорема.

Теорема 2.2 *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров (2.30) и (2.30а), причем для обоих контуров это решение представимо по формуле (2.31).*

3) $n=3$

Из формулы (2.26) получим

$$u_2(r, \varphi) = C_0 + C_1 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{r} + C_2 \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{r^2} + C_3 \frac{\cos 3\varphi + \sin 3\varphi}{r^3}.$$

Поскольку контур σ_δ записывается в виде $r = \cos \varphi - 2\delta \sin \varphi$, то из соотношения (2.22), с учетом формулы Муавра, получим:

$$\begin{aligned} u_2|_{\sigma_\delta} &= C_0 + C_1 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} + C_2 \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^2} + C_3 \frac{\cos 3\varphi + \sin 3\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^3} = \\ &= C_0 + C_1 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} + C_2 \frac{\cos^2 \varphi + 2\sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^2} + \\ &\quad + C_3 \frac{\cos^3 \varphi + 3\cos^2 \varphi \sin \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi - \sin^3 \varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^3} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & C_0 (\cos^3 \varphi - 6\delta \cos^2 \varphi \sin \varphi + 12\delta^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi - 8\delta^3 \sin^3 \varphi) + \\ &+ C_1 (\cos^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi - 4\delta \cos^2 \varphi \sin \varphi - 4\delta \cos \varphi \sin^2 \varphi + 4\delta^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + 4\delta^2 \sin^3 \varphi) + \\ &+ C_2 (\cos^3 \varphi + 2\cos^2 \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi - 2\delta \cos^2 \varphi \sin \varphi - 4\delta \cos \varphi \sin^2 \varphi + 2\delta \sin^3 \varphi) + \\ &+ C_3 (\cos^3 \varphi + 3\cos^2 \varphi \sin \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi - \sin^3 \varphi) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \begin{cases} C_0 + C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ -6\delta C_0 + (1 - 4\delta)C_1 + (2 - 2\delta)C_2 + 3C_3 = 0, \\ 12\delta^2 C_0 + (4\delta^2 - 4\delta)C_1 + (-1 - 4\delta)C_2 - 3C_3 = 0, \\ -8\delta^3 C_0 + 4\delta^2 C_1 + 2\delta C_2 - C_3 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_3 = -C_0 - C_1 - C_2 = -C - C_1 - C_2, \\ -6\delta C + (1 - 4\delta)C_1 + (2 - 2\delta)C_2 - 3C - 3C_1 - 3C_2 = 0, \\ 12\delta^2 C + (4\delta^2 - 4\delta)C_1 + (-1 - 4\delta)C_2 + 3C + 3C_1 + 3C_2 = 0, \\ -8\delta^3 C_0 + 4\delta^2 C_1 + 2\delta C_2 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_3 = -C - C_1 - C_2, \\ (-6\delta - 3)C + (-4\delta - 2)C_1 + (-2\delta - 1)C_2 = 0, \\ (12\delta^2 + 3)C + (4\delta^2 - 4\delta + 3)C_1 + (-4\delta + 2)C_2 = 0, \\ -8\delta^3 C_0 + 4\delta^2 C_1 + 2\delta C_2 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_3 = -C - C_1 - C_2, \\ -3C - 2C_1 - C_2 = 0, \\ (12\delta^2 + 3)C + (4\delta^2 - 4\delta + 3)C_1 + (-4\delta + 2)C_2 = 0, \\ -8\delta^3 C_0 + 4\delta^2 C_1 + 2\delta C_2 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_2 = -3C - 2C_1, \\ C_3 = -C - C_1 - C_2 = -C - C_1 + 3C + 2C_1 = 2C + C_1, \\ (12\delta^2 + 3)C + (4\delta^2 - 4\delta + 3)C_1 + (-4\delta + 2)(-3C) + (-4\delta + 2)(-2C_1) = 0, \\ -8\delta^3 C_0 + 4\delta^2 C_1 + 2\delta C_2 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_2 = -3C - 2C_1, \\ C_3 = 2C + C_1, \\ (12\delta^2 + 12\delta - 3)C + (4\delta^2 + 4\delta - 1)C_1 = 0, \\ -8\delta^3 C_0 + 4\delta^2 C_1 + 2\delta C_2 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_2 = -3C - 2C_1, \\ C_3 = 2C + C_1, \\ 3C + C_1 = 0, \\ -8\delta^3 C_0 + 4\delta^2 C_1 + 2\delta C_2 - C_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -3C, \\ C_2 = -3C - 2C_1 = -3C + 6C = 3C, \\ C_3 = 2C + C_1 = 2C - 3C = -C, \\ -8\delta^3 C + 4\delta^2 \cdot (-3C) + 2\delta \cdot 3C + C = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = C, \\ C_1 = -3C, \\ C_2 = 3C, \\ C_3 = -C, \\ -8\delta^3 - 12\delta^2 + 6\delta + 1 = 0. \end{cases}$$

Решим последнее уравнение системы.

$$8\delta^3 + 12\delta^2 - 6\delta - 1 = 0; \quad (2\delta - 1)(4\delta^2 + 8\delta + 1) = 0;$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2}; \quad \delta_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, функция

$$u_2(r, \varphi) = C \left(1 - 3 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{r} + 3 \frac{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi}{r^2} - \frac{\cos 3\varphi + \sin 3\varphi}{r^3} \right)$$

удовлетворяет задаче (2.21)-(2.23) для $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\delta_3 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Вновь автоматически выполняется соотношение (2.27), что позволяет, с учетом техники проделанных вычислений, говорить о том, что любая функция вида (2.26), удовлетворяющая краевому условию (2.22), удовлетворяет и соотношению (2.27).

Переходя от переменных r, φ к переменным x, y по формулам (2.19), (2.19*) и (2.20), получим с учетом формулы Муавра

$$\begin{aligned} u(x, y) &= C \left(1 - 3 \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{r} + 3 \frac{\cos^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - \sin^3 \varphi}{r^3} \right) = \\ &= C \left(1 - 3 \frac{\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + 3 \frac{\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{2(1-x)y}{(1-x)^2 + y^2} - \frac{y^2}{(1-x)^2 + y^2}}{(1-x)^2 + y^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{(1-x)^3}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3(1-x)^2 y}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3(1-x)y^2}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y^3}{((1-x)^2 + y^2)^{3/2}}}{((1-x)^2 + y^2)\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} \right) = \\ &= C \left(1 - 3 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 3 \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} \right). \end{aligned}$$

Последняя формула дает представление решения в эллиптической части области для $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\delta_3 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Для нахождения решения в гиперболической части области воспользуемся соотношением (2.14).

$$u(x, y) = C \left(1 - 3 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 3 \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_y(x, y) &= C \left(0 - 3 \cdot \frac{1 \cdot ((1-x)^2 + y^2) - (1-x+y) \cdot 2y}{((1-x)^2 + y^2)^2} + \right. \\
&\quad \left. + 3 \cdot \frac{(2(1-x) - 2y) \cdot ((1-x)^2 + y^2)^2 - ((1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2) \cdot 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2y}{((1-x)^2 + y^2)^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(3(1-x)^2 - 6(1-x)y - 3y^2) \cdot ((1-x)^2 + y^2)^3 - ((1-x)^3 + 3(1-x)^2y - 3(1-x)y^2 - y^3) \cdot 3((1-x)^2 + y^2)^2 \cdot 2y}{((1-x)^2 + y^2)^6} - \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow u_y(x, 0) &= C \left(-2 \cdot \frac{(1-x)^2}{(1-x)^4} + 3 \cdot \frac{2(1-x)(1-x)^4}{(1-x)^8} - \frac{3(1-x)^2(1-x)^6}{(1-x)^{12}} \right) = \\
&= C \left(-\frac{3}{(1-x)^2} + \frac{6}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^4} \right); \\
u(x, y) &= \int_0^{x+y} u_y(t, 0) dt = C \int_0^{x+y} \left(-\frac{3}{(1-t)^2} + \frac{6}{(1-t)^3} - \frac{3}{(1-t)^4} \right) dt = C \left(\frac{-3}{(1-t)} + \frac{3}{(1-t)^2} - \frac{1}{(1-t)^3} \right) \Big|_0^{x+y} = \\
&= C \left(-\frac{3}{1-x-y} + \frac{3}{(1-x-y)^2} - \frac{1}{(1-x-y)^3} + 3 - 3 + 1 \right) = \\
&= -C \left(\frac{1}{(1-x-y)^3} - 3 \frac{1}{(1-x-y)^2} + \frac{1}{1-x-y} - 1 \right) = -C \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^3 = -C \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^3
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили представление решения в гиперболической части области.

В итоге, для кривых Ляпунова

$$\sigma_1 = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}, \quad y > 0 \right\}, \quad (2.32)$$

$$\sigma_2 = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)^2, \quad y > 0 \right\} \quad (2.32a)$$

и

$$\sigma_3 = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2} \right)^2, \quad y > 0 \right\} \quad (2.32б)$$

решение исходной задачи (2.1)-(2.3) примет следующий вид

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - 3 \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} + 3 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} - 1, & y > 0, \\ \frac{1}{(1-x-y)^3} - \frac{3}{(1-x-y)^2} + \frac{3}{1-x-y} - 1 = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^3 = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^3, & y < 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

(В силу однородности и линейности задачи (2.1)-(2.3), решение (2.33) дается с точностью до произвольной постоянной $C \neq 0$).

Проверим тот факт, что функция (2.33) будет решением задачи (2.1)-(2.3) для контуров (2.32), (2.32а) и (2.32б).

а) при $y < 0$ уравнение (2.1) примет вид

$$-u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{или} \quad u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.33) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^3} - \frac{3}{(1-x-y)^2} + \frac{3}{1-x-y} - 1,$$

получим

$$\begin{aligned} u_x &= -3(1-x-y)^{-4}(-1) - 3(-2)(1-x-y)^{-3}(-1) + 3(-1)(1-x-y)^{-2}(-1) - 0 = \\ &= \frac{3}{(1-x-y)^4} - \frac{6}{(1-x-y)^3} + \frac{3}{(1-x-y)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 3(-4)(1-x-y)^{-5} \cdot (-1) - 6(-3)(1-x-y)^{-4} \cdot (-1) + 3(-2)(1-x-y)^{-3} \cdot (-1) = \\ &= \frac{12}{(1-x-y)^5} - \frac{18}{(1-x-y)^4} + \frac{6}{(1-x-y)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= -3(1-x-y)^{-4}(-1) - 3(-2)(1-x-y)^{-3}(-1) + 3(-1)(1-x-y)^{-2}(-1) - 0 = \\ &= \frac{3}{(1-x-y)^4} - \frac{6}{(1-x-y)^3} + \frac{3}{(1-x-y)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= 3(-4)(1-x-y)^{-5} \cdot (-1) - 6(-3)(1-x-y)^{-4} \cdot (-1) + 3(-2)(1-x-y)^{-3} \cdot (-1) = \\ &= \frac{12}{(1-x-y)^5} - \frac{18}{(1-x-y)^4} + \frac{6}{(1-x-y)^3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u_{xx} - u_{yy} = \frac{12}{(1-x-y)^5} - \frac{18}{(1-x-y)^4} + \frac{6}{(1-x-y)^3} - \frac{12}{(1-x-y)^5} + \frac{18}{(1-x-y)^4} - \frac{6}{(1-x-y)^3} = 0,$$

так как $1-x-y \neq 0 \Leftrightarrow x+y \neq 1$ в Ω^- , то есть функция (2.33) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y < 0$.

При $y > 0$ уравнение (2.1) примет вид

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Рассмотрим представление функции (2.33) при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - 3 \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} + 3 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} - 1.$$

Предварительно найдем первые и вторые частные производные по x и по y первого слагаемого последней функции, а именно функции

$$u_1 = \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} u_{1x} &= \frac{(-3(1-x)^2 - 6(1-x)y + 3y^2)((1-x)^2 + y^2)^3 - 3((1-x)^2 + y^2)^2(-2)(1-x)((1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3)}{((1-x)^2 + y^2)^6} = \\ &= \frac{3(-(1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2)((1-x)^2 + y^2) + 3 \cdot 2(1-x)((1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3)}{((1-x)^2 + y^2)^4} = \\ &= 3 \frac{-(1-x)^4 - 2(1-x)^3 y + (1-x)^2 y^2 - (1-x)^2 y^2 - 2(1-x)y^3 + y^4 + 2(1-x)^4 + 6(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 2(1-x)y^3}{((1-x)^2 + y^2)^4} = \\ &= 3 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4}; \\ u_{1xx} &= 3 \frac{(-4(1-x)^3 - 12(1-x)^2 y + 12(1-x)y^2 + 4y^3)((1-x)^2 + y^2)^4 -}{((1-x)^2 + y^2)^8} - \\ &- 3 \frac{4((1-x)^2 + y^2)^3(-2)(1-x)((1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4)}{((1-x)^2 + y^2)^8} = \\ &= 12 \frac{(-(1-x)^3 - 3(1-x)^2 y + 3(1-x)y^2 + y^3)((1-x)^2 + y^2) + 2(1-x)((1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4)}{((1-x)^2 + y^2)^5} = \end{aligned}$$

$$= 12 \frac{-(1-x)^5 - 3(1-x)^4 y + 3(1-x)^3 y^2 + 3(1-x)^2 y^3 - (1-x)^3 y^2 - 3(1-x)^2 y^3 + 3(1-x)y^4 + y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5} +$$

$$+ 12 \frac{2(1-x)^5 + 8(1-x)^4 y - 12(1-x)^3 y^2 - 8(1-x)^2 y^3 + 2(1-x)y^4}{((1-x)^2 + y^2)^5} =$$

$$= 12 \frac{(1-x)^5 + 5(1-x)^4 y - 10(1-x)^3 y^2 - 10(1-x)^2 y^3 + 5(1-x)y^4 + y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5};$$

$$u1_y = \frac{(3(1-x)^2 - 3(1-x) \cdot 2y - 3y^2)((1-x)^2 + y^2)^3 - 3((1-x)^2 + y^2)^2 \cdot 2y((1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3)}{((1-x)^2 + y^2)^6} =$$

$$= \frac{3((1-x)^2 - 2(1-x)y - y^2)((1-x)^2 + y^2) - 3 \cdot 2y((1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3)}{((1-x)^2 + y^2)^4} =$$

$$= 3 \frac{(1-x)^4 - 2(1-x)^3 y - (1-x)^2 y^2 + (1-x)^2 y^2 - 2(1-x)y^3 - y^4 - 2(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 + 6(1-x)y^3 + 2y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} =$$

$$= 3 \frac{(1-x)^4 - 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4};$$

$$u1_{yy} = 3 \frac{(-4(1-x)^3 - 12(1-x)^2 y + 12(1-x)y^2 + 4y^3)((1-x)^2 + y^2)^4}{((1-x)^2 + y^2)^8} -$$

$$- 3 \frac{4((1-x)^2 + y^2)^3 2y((1-x)^4 - 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)y^3 + y^4)}{((1-x)^2 + y^2)^8} =$$

$$= -12 \frac{((1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3)((1-x)^2 + y^2) + 2y((1-x)^4 - 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)y^3 + y^4)}{((1-x)^2 + y^2)^5} =$$

$$= -12 \frac{(1-x)^5 + 3(1-x)^4 y - 3(1-x)^3 y^2 - (1-x)^2 y^3 + (1-x)^3 y^2 + 3(1-x)^2 y^3 - 3(1-x)y^4 - y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5} -$$

$$- 12 \frac{2(1-x)^4 y - 8(1-x)^3 y^2 - 12(1-x)^2 y^3 + 8(1-x)y^4 + 2y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5} =$$

$$= -12 \frac{(1-x)^5 + 5(1-x)^4 y - 10(1-x)^3 y^2 - 10(1-x)^2 y^3 + 5(1-x)y^4 + y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5}.$$

Учитывая данные соотношения, а также полученные в пункте 2) равенства

$$\left(\frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right)_x = 2 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3},$$

$$\left(\frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right)_{xx} = 6 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4},$$

$$\left(\frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right)_y = 2 \frac{(1-x)^3 - 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 + y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3},$$

$$\left(\frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right)_{yy} = -6 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4},$$

$$\left(\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} \right)_x = \frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2},$$

$$\left(\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} \right)_{xx} = 2 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3},$$

$$\left(\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} \right)_y = \frac{(1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2},$$

$$\left(\frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} \right)_{yy} = -2 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3},$$

получим окончательно

$$u_x = 3 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} -$$

$$- 6 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} + 3 \frac{(1-x)^2 + 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2},$$

$$u_{xx} = 12 \frac{(1-x)^5 + 5(1-x)^4 y - 10(1-x)^3 y^2 - 10(1-x)^2 y^3 + 5(1-x)y^4 + y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5} -$$

$$- 18 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} + 6 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3},$$

$$\begin{aligned}
u_y &= 3 \frac{(1-x)^4 - 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} - \\
&\quad - 6 \frac{(1-x)^3 - 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 + y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} + 3 \frac{(1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2}, \\
u_{yy} &= -12 \frac{(1-x)^5 + 5(1-x)^4 y - 10(1-x)^3 y^2 - 10(1-x)^2 y^3 + 5(1-x)y^4 + y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5} - \\
&\quad + 18 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} - 6 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 12 \frac{(1-x)^5 + 5(1-x)^4 y - 10(1-x)^3 y^2 - 10(1-x)^2 y^3 + 5(1-x)y^4 + y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5} - \\
&\quad - 18 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} + 6 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - \\
&\quad - 12 \frac{(1-x)^5 + 5(1-x)^4 y - 10(1-x)^3 y^2 - 10(1-x)^2 y^3 + 5(1-x)y^4 + y^5}{((1-x)^2 + y^2)^5} + \\
&\quad + 18 \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} - 6 \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} = 0,
\end{aligned}$$

так как $((1-x)^2 + y^2) \neq 0$ в Ω^+ , то есть функция (2.33) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y > 0$.

В итоге, функция (2.33) удовлетворяет уравнению (2.1) во всей области Ω .

б) Краевое условие (2.2) можно записать как

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = 0 \quad - \text{ в гиперболической части } \Omega^-,$$

$$u|_{\sigma_\delta} = u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}} = 0 \quad - \text{ для контура } \sigma_1,$$

$$u|_{\sigma_\delta} = u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0 \quad - \text{ для контура } \sigma_2,$$

или

$$u|_{\sigma_3} = u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 0 \text{ - для контура } \sigma_3,$$

- в эллиптической части Ω^+ .

Учитывая представление функции (2.33) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^3} - \frac{3}{(1-x-y)^2} + \frac{3}{1-x-y} - 1 = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1\right)^3 = \left(\frac{1-1+x+y}{1-x-y}\right)^3 = \left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^3,$$

получим

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = \left(\frac{x+y}{1-(x+y)}\right)^3 \Big|_{x+y=0} = \left(\frac{0}{1-0}\right)^3 = 0,$$

то есть функция (2.33) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2.2).

Учитывая представление функции (2.33) при $y > 0$ и преобразовав его, получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - 3 \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} + 3 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} - 1 = \\ &= - \left(1 - 3 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} + 3 \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} \right) = \\ &= - \left(1 - 3 \frac{1-x-y}{(1-x)^2 + y^2} + 3 \frac{(1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - \frac{(1-x)^3 - 3(1-x)^2 y + 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - \right. \\ &\quad \left. - 3 \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2} + 3 \frac{4(1-x)y - 2y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} - \frac{6(1-x)^2 y - 6(1-x)y^2}{((1-x)^2 + y^2)^3} \right) = \\ &= - \left(1 - \frac{1-x-y}{(1-x)^2 + y^2} \right)^3 + 6y \left(\frac{1}{(1-x)^2 + y^2} - \frac{2(1-x)-y}{((1-x)^2 + y^2)^2} + \frac{(1-x)^2 - (1-x)y}{((1-x)^2 + y^2)^3} \right) = \\ &= - \left(1 - \frac{1-x-y}{(1-x)^2 + y^2} \right)^3 + \frac{6y((1-x)^4 + 2(1-x)^2 y^2 + y^4 - 2(1-x)^3 + y(1-x)^2 - 2(1-x)y^2 + y^3 + (1-x)^2 - (1-x)y)}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(1 - \frac{1-x-y}{(1-x)^2 + y^2}\right)^3 + \frac{6y}{((1-x)^2 + y^2)^3} \times \\
&\times ((1-x)^4 + (1-x)^2 y^2 - (1-x)^3 + y(1-x)^2 - (1-x)^3 - (1-x)y^2 + (1-x)^2 - (1-x)y + (1-x)^2 y^2 + y^4 - (1-x)y^2 + y^3) = \\
&= -\left(\frac{(1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y}{(1-x)^2 + y^2}\right)^3 + \frac{6y}{((1-x)^2 + y^2)^3} \times \\
&\times ((1-x)^2((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y) - (1-x)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y) + y^2((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)) = \\
&= -\frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)^3 - 6y((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)((1-x)^2 - (1-x) + y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
&= -((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y) \frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)^2 - 6y((1-x)^2 - (1-x) + y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
&= -((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y) \frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)^2 - 6y((1-x)^2 - (1-x) + y^2) - 6y^2 + 6y^2}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
&= -((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y) \frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)^2 - 6y((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y) + (3-\sqrt{3})y \cdot (3+\sqrt{3})y}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
&= -((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y) \frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y - (3-\sqrt{3})y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y - (3+\sqrt{3})y)}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
&= -\frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2-\sqrt{3})y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2+\sqrt{3})y)}{((1-x)^2 + y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Но, преобразовав выражения (2.32), (2.32а) и (2.32б) для контуров σ_1 , σ_2 и σ_3 , получим

$$\begin{aligned}
\sigma_1: \quad &\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + y + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y = 0,
\end{aligned}$$

$$\sigma_2: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - (2-\sqrt{3})y + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - (2-\sqrt{3})y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - (2-\sqrt{3})y + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2-\sqrt{3})y = 0,$$

$$\sigma_3: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - (2+\sqrt{3})y + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - (2+\sqrt{3})y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - (2+\sqrt{3})y + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2+\sqrt{3})y = 0.$$

Следовательно,

$$u|_{\sigma_1} = - \frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2-\sqrt{3})y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2+\sqrt{3})y)}{((1-x)^2 + y^2)^3} \Big|_{(1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y = 0} = 0,$$

$$u|_{\sigma_2} = - \frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2-\sqrt{3})y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2+\sqrt{3})y)}{((1-x)^2 + y^2)^3} \Big|_{(1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2-\sqrt{3})y = 0} = 0,$$

$$u|_{\sigma_3} = - \frac{((1-x)^2 + y^2 - (1-x) + y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2-\sqrt{3})y)((1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2+\sqrt{3})y)}{((1-x)^2 + y^2)^3} \Big|_{(1-x)^2 + y^2 - (1-x) - (2+\sqrt{3})y = 0} = 0,$$

то есть функция (2.33) удовлетворяет и эллиптической части краевого условия (2.2), причем для всех контуров σ_1 , σ_2 и σ_3 .

Таким образом, функция (2.33) удовлетворяет краевому условию (2.2) для всех контуров σ_1 , σ_2 и σ_3 .

в) Учитывая представление функции (2.33) при $y < 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{(1-x-y)^3} - \frac{3}{(1-x-y)^2} + \frac{3}{1-x-y} - 1,$$

получим

$$u_y(x, y) = \frac{3}{(1-x-y)^4} - \frac{6}{(1-x-y)^3} + \frac{3}{(1-x-y)^2},$$

откуда

$$u(x, -0) = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} - 1,$$

$$u_y(x, -0) = \frac{3}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)^2}.$$

Из представления функции (2.33) при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{(1-x)^3 + 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 - y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} - 3 \frac{(1-x)^2 + 2(1-x)y - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2} + 3 \frac{1-x+y}{(1-x)^2 + y^2} - 1$$

имеем

$$u_y(x, y) = 3 \frac{(1-x)^4 - 4(1-x)^3 y - 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)y^3 + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} - \\ - 6 \frac{(1-x)^3 - 3(1-x)^2 y - 3(1-x)y^2 + y^3}{((1-x)^2 + y^2)^3} + 3 \frac{(1-x)^2 - 2y(1-x) - y^2}{((1-x)^2 + y^2)^2},$$

то есть

$$u(x, +0) = \frac{(1-x)^3}{((1-x)^2)^3} - 3 \frac{(1-x)^2}{((1-x)^2)^2} + 3 \frac{1-x}{(1-x)^2} - 1 = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} - 1,$$

$$u_y(x, +0) = 3 \frac{(1-x)^4}{((1-x)^2)^4} - 6 \frac{(1-x)^3}{((1-x)^2)^3} + 3 \frac{(1-x)^2}{((1-x)^2)^2} = \frac{3}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)^2}.$$

В итоге,

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} - 1,$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \frac{3}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)^2},$$

так как $1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ при $x \in AB(0,1)$, то есть функция (2.33) удовлетворяет условиям склеивания (2.3).

В итоге, функция (2.33) является решением однородной задачи Трикоми (задачи (2.1)-(2.3)) для контуров (2.32), (2.32а) и (2.32б). Но, как легко видеть, функция (2.33) имеет разрыв в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.3 *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров (2.32), (2.32а) и (2.32б), причем для всех контуров это решение представимо по формуле (2.33).*

3) n - произвольное натуральное число ($n = n$)

Прежде чем переходить в формуле (2.26) к произвольному натуральному n и находить соответствующий ему контур σ_δ и значения C_k так, чтобы функция (2.26) являлась бы решением задачи (2.21)-(2.23), проанализируем случаи $n=1$, $n=2$ и $n=3$ с точки зрения соответствия значений n и δ , а также определяемому по формуле (2.4) числу γ_δ , зависящему от δ .

При $n=1$ $\delta = -\frac{1}{2}$, следовательно, как видно из формулы (2.4), $\gamma_\delta = \frac{3\pi}{4}$ или $\gamma_\delta = \frac{3\pi}{4n}$.

При $n=2$ $\delta_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, $\delta_2 = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Покажем, что в этом случае $\gamma_{\delta_1} = \frac{3\pi}{8}$ и $\gamma_{\delta_2} = \frac{7\pi}{8}$ соответственно. Имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} = \frac{\cos \frac{3\pi}{8}}{\sin \frac{3\pi}{8}} = \frac{\sqrt{\frac{1+\cos \frac{3\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos \frac{3\pi}{4}}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$$

$$= \sqrt{2}-1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 2\delta_1 \Rightarrow \text{по формуле (2.4)} \Rightarrow \gamma_{\delta_1} = \frac{3\pi}{8};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = -\frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} = -\frac{\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{2}}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} =$$

$$= -\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} = -\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -(\sqrt{2}+1) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) = 2\delta_2 \Rightarrow \text{по формуле (2.4)} \Rightarrow \gamma_{\delta_2} = \frac{7\pi}{8}.$$

Таким образом, при $n=2$ $\gamma_{\delta_1} = \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4n}$, $\gamma_{\delta_2} = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi}{n}$.

Наконец, при $n=3$ $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = -\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ и $\delta_3 = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. Покажем, что в этом случае $\gamma_{\delta_1} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$, $\gamma_{\delta_2} = \frac{7\pi}{12}$ и $\gamma_{\delta_3} = \frac{11\pi}{12}$ соответственно. Имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 2\delta_1 \Rightarrow \gamma_{\delta_1} = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{12} &= \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = -\frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = -\frac{\sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{6}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{6}}{2}}} = -\frac{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = -\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = -(2-\sqrt{3}) = 2 \cdot \left(-\frac{2-\sqrt{3}}{2} \right) = 2\delta_2 \Rightarrow \gamma_{\delta_2} = \frac{7\pi}{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12} &= \operatorname{ctg} \left(\pi - \frac{\pi}{12} \right) = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = -\frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} = -\frac{\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{6}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{6}}{2}}} = -\frac{\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = -\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = -(2+\sqrt{3}) = 2 \cdot \left(-\frac{2+\sqrt{3}}{2} \right) = 2\delta_3 \Rightarrow \gamma_{\delta_3} = \frac{11\pi}{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n=3$ $\gamma_{\delta_1} = \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, $\gamma_{\delta_2} = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{12}$ и $\gamma_{\delta_3} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{12}$.

Сопоставляя рассмотренные частные случаи ($n=1$, $n=2$, $n=3$), мы видим, что для них выполняется следующее соотношение между n , определяемым из формулы (2.26), и γ_δ , определяемым по формуле (2.4):

$$n = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi p}{\gamma_\delta}, \quad p = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.34)$$

Этот факт наталкивает нас на гипотезу о том, что соотношение (2.26) при произвольном натуральном n дает нам представление решения задачи (2.21)-(2.23) для n различных контуров σ_δ , соответствующих следующим значениям γ_δ :

$$\gamma_\delta = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi p}{n}, \quad p = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.35)$$

Отметим, что у нас получается ровно n контуров (соответствующих $p = 0, 1, \dots, n-1$), так как при $p = n, n+1, \dots$, согласно формуле (2.35), $\gamma_\delta > \pi$, что противоречит определению (2.4) числа γ_δ . Далее заметим, что для всех трех случаев ($n=1$, $n=2$, $n=3$) коэффициенты C_k совпадают с биномиальными коэффициентами, то есть, с учетом знака, с коэффициентами разложения $(a-b)^n$. Следовательно, мы можем предполагать, что для произвольного натурального n коэффициенты C_k определяются по формуле

$$C_k = (-1)^{n-k} C_n^k, \quad \text{где} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким образом, докажем, с учетом сказанного выше и формулы (2.26), что следующая функция является решением задачи (2.21)-(2.23).

$$u_2(r, \varphi) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{r^k}. \quad (2.36)$$

По построению, функция (2.26), а значит и функция (2.36) удовлетворяет уравнению (2.21) и условию (2.23), следовательно, нам осталось показать, что функция (2.36) удовлетворяет и условию (2.22), то есть, с учетом того, что контур σ_δ записывается в виде $r = \cos \varphi - 2\delta \sin \varphi$, нам достаточно показать, что

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} = 0, \quad (2.37)$$

где δ таково, что число γ_δ , определяемое по формуле (2.5), удовлетворяет соотношению (2.35). Рассмотрим предварительно следующее выражение (с учетом формулы Муавра)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} \right)^k \cdot (-1)^{n-k} = \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} - 1 \right)^n = \\ &= \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi - \cos \varphi + 2\delta \sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} \right)^n = \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi} \right)^n \cdot (2\delta + i)^n. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} \right) + \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{(\cos \varphi - 2\delta \sin \varphi)^k} \right),$$

следовательно

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{(\cos\varphi - 2\delta \sin\varphi)^k} = \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta \sin\varphi} \right)^n (\operatorname{Re}(2\delta + i)^n + \operatorname{Im}(2\delta + i)^n). \quad (2.38)$$

С другой стороны, из соотношения (2.4) с учетом формулы (2.35) имеем

$$\begin{aligned} (2\delta + i)^n &= (\operatorname{ctg}\gamma_\delta + i)^n = \left(\frac{\cos\gamma_\delta}{\sin\gamma_\delta} + i \right)^n = \left(\frac{\cos\gamma_\delta + i \sin\gamma_\delta}{\sin\gamma_\delta} \right)^n = \left(\frac{1}{\sin\gamma_\delta} \right)^n (\cos n\gamma_\delta + i \sin n\gamma_\delta) = \\ &= \frac{1}{\left(\sin \frac{3\pi}{4} + \pi p \right)^n} \left(\cos n \cdot \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi p}{n} + i \sin n \cdot \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi p}{n} \right) = \frac{1}{\left(\sin \frac{3\pi}{4} + \pi p \right)^n} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \pi p \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \pi p \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая что $p = 0, 1, \dots, n-1$, получим с учетом соотношения (2.38)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{(\cos\varphi - 2\delta \sin\varphi)^k} &= \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta \sin\varphi} \right)^n (\operatorname{Re}(2\delta + i)^n + \operatorname{Im}(2\delta + i)^n) = \\ &= \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\delta \sin\varphi} \right)^n \cdot \frac{1}{\left(\sin \frac{3\pi}{4} + \pi p \right)^n} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \pi p \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \pi p \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2.37) доказано, а функция (2.36) является решением задачи (2.21)-(2.23) для тех контуров σ_δ , которые удовлетворяют соотношению (2.35).

Переходя от переменных r, φ к переменным x и y по формулам (2.19), (2.19*) и (2.20), получим из соотношения (2.36)

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right) + \sin \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right)}{\left((1-x)^2 + y^2 \right)^{\frac{k}{2}}}, \quad (2.39)$$

или, так как

$$\begin{aligned} u_2(r, \varphi) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{r^k} = \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{r^k} \right) + \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + \sin k\varphi}{r^k} \right), \end{aligned}$$

а также

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos k\varphi + i \sin k\varphi}{r^k} = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{r} \right)^k (-1)^{n-k} = \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{r} - 1 \right)^n,$$

имеем

$$u_2(r, \varphi) = \operatorname{Re} \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{r} - 1 \right)^n + \operatorname{Im} \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{r} - 1 \right)^n,$$

откуда

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} - 1 \right)^n + \operatorname{Im} \left(\frac{\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}}}{\sqrt{(1-x)^2 + y^2}} - 1 \right)^n = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Полученные соотношения (2.39) и (2.40) дают представление решения в эллиптической части области для тех контуров σ_δ , для которых выполнено соотношение (2.35). Для нахождения решения в гиперболической части области воспользуемся соотношением (2.14).

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right) + \sin \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right)}{\left((1-x)^2 + y^2 \right)^{\frac{k}{2}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| m.k. \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1-x)^2}} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + y^2} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_y(x, y) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \left(\frac{\left(-\sin \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right) \cdot k \cdot \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} + \cos \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right) \cdot k \cdot \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} \right)}{\left((1-x)^2 + y^2 \right)^k} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left((1-x)^2 + y^2 \right)^{\frac{k}{2}} - \frac{\left(\cos \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right) + \sin \left(k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{1-x} \right) \right) \cdot \frac{k}{2} \cdot \left((1-x)^2 + y^2 \right)^{\frac{k}{2}-1} \cdot 2y}{\left((1-x)^2 + y^2 \right)^k} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_y(x,0) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \cdot \frac{k \cdot \frac{1-x}{(1-x)^2} \cdot (1-x)^k}{(1-x)^{2k}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \cdot \frac{k}{(1-x)^{k+1}} = \\
&= \left| \text{м.к. } n \text{ при } k=0: (-1)^{n-k} C_n^k \cdot \frac{k}{(1-x)^{k+1}} = 0 \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k \cdot \frac{k}{(1-x)^{k+1}} \Rightarrow \\
u(x,y) &= \int_0^{x+y} u_y(t,0) dt = \int_0^{x+y} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k k (1-t)^{-k-1} \right) dt = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k k \cdot \int_0^{x+y} (1-t)^{-k-1} dt = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k \cdot k \cdot \frac{(1-t)^{-k-1+1}}{-k-1+1} \Big|_0^{x+y} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k \cdot \frac{1}{(1-t)^k} \Big|_0^{x+y} = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k \left(\frac{1}{(1-x-y)^k} - 1 \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{1}{(1-x-y)^k} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k = \\
&= \left| \text{м.к. } \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k = 0, \text{ то } (-1)^n C_n^0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k = -(-1)^n \right| = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{1}{(1-x-y)^k} + (-1)^n = \left| \text{м.к. } (-1)^{n-k} C_n^k \cdot \frac{1}{(1-x-y)^k} \Big|_{k=0} = (-1)^n C_n^0 = (-1)^n \right| = \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{1}{(1-x-y)^k} = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^n = \left(\frac{1-1+x+y}{1-x-y} \right)^n = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^n.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили представление решения в гиперболической части области.

В итоге, для кривых Ляпунова, удовлетворяющих условию (2.35), решение исходной задачи (2.1)-(2.3) примет следующий вид

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k \frac{\cos\left(k \cdot \arctg \frac{y}{1-x}\right) + \sin\left(k \cdot \arctg \frac{y}{1-x}\right)}{\left((1-x)^2 + y^2\right)^{\frac{k}{2}}} = \\ \quad = \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^n = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^n, & y < 0, \end{cases} \quad (2.41)$$

(В силу однородности и линейности задачи (2.1)-(2.3), решение (2.41) дается с точностью до произвольной постоянной $C \neq 0$).

Проверим тот факт, что функция (2.41) будет решением задачи (2.1)-(2.3) для контуров σ_δ , для которых выполнено соотношение (2.35).

Обозначим

$$w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n, \quad (2.42)$$

то есть

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y) \quad \text{при} \quad y > 0. \quad (2.43)$$

Здесь мы встретились с необходимостью (для проверки всех соотношений задачи Трикоми) нахождения частных производных от функции комплексного переменного.

Известно [78, с. 79], что если

$$f(x) = \varphi(x) + i\phi(x),$$

то

$$f'(x) = \varphi'(x) + i\phi'(x).$$

Аналогично, если

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + i \operatorname{Im} w(x, y),$$

то

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= (\operatorname{Re} w(x, y))_x + i(\operatorname{Im} w(x, y))_x, \\ u_{xx}(x, y) &= (\operatorname{Re} w(x, y))_{xx} + i(\operatorname{Im} w(x, y))_{xx}, \\ u_y(x, y) &= (\operatorname{Re} w(x, y))_y + i(\operatorname{Im} w(x, y))_y, \\ u_{yy}(x, y) &= (\operatorname{Re} w(x, y))_{yy} + i(\operatorname{Im} w(x, y))_{yy}, \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая соотношение (2.43), получим

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \operatorname{Re}(w_{xx} + w_{yy}) + \operatorname{Im}(w_{xx} + w_{yy}), \\ u_y(x, +0) = \operatorname{Re}(w_y(x, +0)) + \operatorname{Im}(w_y(x, +0)), \\ u(x, +0) = \operatorname{Re}(w(x, +0)) + \operatorname{Im}(w(x, +0)). \end{cases} \quad (2.44)$$

Покажем теперь, что функция (2.41) удовлетворяет соотношениям (2.1)-(2.3) для тех σ_δ , для которых выполнено условие (2.35).

а) при $y < 0$ уравнение (2.1) записывается в виде

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.41) при $y < 0$

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^n,$$

имеем

$$u_x(x, y) = n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{(1-x-y)^2} \right) \cdot (-1) = n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^2};$$

$$u_{xx}(x, y) = n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3};$$

$$u_y(x, y) = n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^2};$$

$$u_{yy}(x, y) = n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} - \\ &\quad - n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} = 0, \end{aligned}$$

так как $x + y \neq 1$ в Ω^- .

Таким образом, функция (2.41) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y < 0$.

При $y > 0$ уравнение (2.1) записывается в виде

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Согласно (2.41), имеет место следующее представление функции $u(x, y)$ при $y > 0$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n.$$

В силу соотношений (2.44), нам достаточно вычислить значение выражения

$$w_{xx} + w_{yy}, \quad \text{где} \quad w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} w_x &= n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{(-1) \cdot ((1-x)^2 + y^2) - 2(1-x) \cdot (-1) \cdot (1-x+iy)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \\ &= n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{-(1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)^2 + 2(1-x)y \cdot i}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \\ &= n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{(1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)y \cdot i}{((1-x)^2 + y^2)^2}; \\ w_{xx} &= n(n-1) \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{(1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)y \cdot i}{((1-x)^2 + y^2)^2} \right)^2 + n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \times \\ &\times \frac{(-2(1-x) - 2y \cdot i)((1-x)^2 + y^2)^2 + 2((1-x)^2 + y^2) \cdot 2(1-x) \cdot ((1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)y \cdot i)}{((1-x)^2 + y^2)^4} = \\ &= n(n-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-2} \frac{(1-x)^4 + y^4 + 4(1-x)^2 y^2 i^2 - 2(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)^3 y i - 4(1-x)y^3 i}{((1-x)^2 + y^2)^4} + \\ &+ n \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \frac{-2(1-x)^3 - 2(1-x)^2 y i - 2(1-x)y^2 - 2y^3 i + 4(1-x)^3 - 4(1-x)y^2 + 8(1-x)^2 y i}{((1-x)^2 + y^2)^3} = \\ &= n(n-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-2} \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y \cdot i - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 \cdot i + y^4}{((1-x)^2 + y^2)^4} + \\ &+ n \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \frac{2(1-x)^3 + 6(1-x)^2 y \cdot i - 6(1-x)y^2 - 2y^3 \cdot i}{((1-x)^2 + y^2)^3}; \\ w_y &= n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{i \cdot ((1-x)^2 + y^2) - 2y \cdot (1-x+iy)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \\ &= n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{(1-x)^2 \cdot i - 2(1-x)y - y^2 \cdot i}{((1-x)^2 + y^2)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{yy} &= n(n-1) \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{(1-x)^2 \cdot i - 2(1-x)y - y^2 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^2} \right)^2 + n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{n-1} \times \\
&\quad \times \frac{(-2(1-x) - 2y \cdot i)((1-x)^2+y^2)^2 - 2((1-x)^2+y^2) \cdot 2y \cdot ((1-x)^2 \cdot i - 2(1-x)y - y^2 \cdot i)}{((1-x)^2+y^2)^4} = \\
&= n(n-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{n-2} \frac{(1-x)^4 i^2 + 4(1-x)^2 y^2 + y^4 i^2 - 4(1-x)^3 y i - 2(1-x)^2 y^2 i^2 + 4(1-x) y^3 i}{((1-x)^2+y^2)^4} + \\
&+ n \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{n-1} \frac{-2(1-x)^3 - 2(1-x)^2 y i - 2(1-x) y^2 - 2y^3 i - 4(1-x)^2 y i + 8(1-x) y^2 + 4y^3 i}{((1-x)^2+y^2)^3} = \\
&= n(n-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{n-2} \frac{-(1-x)^4 - 4(1-x)^3 y \cdot i + 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x) y^3 \cdot i - y^4}{((1-x)^2+y^2)^4} + \\
&\quad + n \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{n-1} \frac{-2(1-x)^3 - 6(1-x)^2 y \cdot i + 6(1-x) y^2 + 2y^3 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $w_{xx} + w_{yy} = 0$, так как $(1-x)^2 + y^2 \neq 0$ в Ω^+ , следовательно

$$\operatorname{Re}(w_{xx} + w_{yy}) + \operatorname{Im}(w_{xx} + w_{yy}) = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

В итоге, функция (2.41) удовлетворяет уравнению (2.1) как при $y > 0$, так и при $y < 0$.

б) при $y < 0$ краевое условие (2.2) примет вид

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.41) при $y < 0$

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^n = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^n,$$

имеем

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^n \Big|_{x+y=0} = 0, \quad \text{так как } n > 0.$$

Таким образом, функция (2.41) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2.2).

При $y > 0$ краевое условие (2.2) примет вид

$$u|_{\sigma_\delta} = 0.$$

Представление функции (2.41) при $y > 0$ следующее

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y),$$

где

$$w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^n = \left(\frac{1-x+iy-(1-x)^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \right)^n = \left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^n.$$

Преобразуем выражение для контура σ_δ :

$$\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y\delta + \delta^2 = \frac{1}{4} + \delta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + y^2 + 2y\delta = 0 \Rightarrow 2y\delta = x - x^2 - y^2 \Rightarrow 2y\delta = -1 + 2x - x^2 - y^2 + 1 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y\delta = -(1-x)^2 - y^2 + (1-x) \Rightarrow 2y\delta = (1-x) - (1-x)^2 - y^2.$$

Таким образом, краевое условие запишется как $u|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta} = 0$. Имеем, учитывая определение (2.5) числа γ_δ :

$$\begin{aligned} w(x, y)|_{\sigma_\delta} &= \left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^n \Big|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta} = \left(\frac{2y\delta+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^n = \\ &= \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^n (2\delta+i)^n = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^n (\operatorname{ctg} \gamma_\delta + i)^n = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^n \left(\frac{\cos \gamma_\delta}{\sin \gamma_\delta} + i \right)^n = \\ &= \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^n \left(\frac{\cos \gamma_\delta + i \sin \gamma_\delta}{\sin \gamma_\delta} \right)^n = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^n \left(\frac{1}{\sin \gamma_\delta} \right)^n (\cos n\gamma_\delta + i \sin n\gamma_\delta); \end{aligned}$$

следовательно,

$$u|_{\sigma_\delta} = (\operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y))|_{\sigma_\delta} = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^n \left(\frac{1}{\sin \gamma_\delta} \right)^n (\cos n\gamma_\delta + \sin n\gamma_\delta);$$

но, согласно условию (2.35),

$$\gamma_\delta = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi p}{n} \Rightarrow n\gamma_\delta = \frac{3\pi}{4} + \pi p \Rightarrow \cos n\gamma_\delta + \sin n\gamma_\delta = 0.$$

Таким образом,

$$u|_{\sigma_\delta} = 0.$$

В итоге, краевое условие (2.2) выполнено полностью для функции (2.41).

в) при $y < 0$ функция (2.41) имеет вид

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^n,$$

откуда

$$u_y(x, y) = n \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^2},$$

$$u(x, -0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^n,$$

$$u_y(x, -0) = n \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

При $y > 0$ имеем:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y),$$

где

$$w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^n.$$

Следовательно, с учетом соотношений (2.44), получим последовательно:

$$w_y(x, y) = n \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{i \cdot ((1-x)^2 + y^2) - 2y \cdot (1-x+iy)}{((1-x)^2 + y^2)^2},$$

$$w(x, +0) = \left(\frac{1-x}{(1-x)^2} - 1 \right)^n = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^n \Rightarrow u(x, +0) = \operatorname{Re} w(x, +0) + \operatorname{Im} w(x, +0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^n,$$

$$w_y(x, +0) = n \cdot \left(\frac{1-x}{(1-x)^2} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{i \cdot (1-x)^2}{(1-x)^4} = n \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_y(x, +0) = \operatorname{Re} w_y(x, +0) + \operatorname{Im} w_y(x, +0) = n \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким образом, для функции (2.41)

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^n,$$

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = n \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2},$$

и условия (2.3) выполнены.

В итоге, функция (2.41) является решением однородной задачи Трикоми (2.1)-(2.2), причем выполнены условия (2.3), для контуров σ_δ , удовлетворяющих условию (2.35). Но, очевидно, функция (2.41) является разрывной в точке $B(1,0)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.4 *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров σ_δ , удовлетворяющих условию (2.35), причем для этих контуров решение представимо по формуле (2.41).*

2.3 Получение разрывного решения для контура общего вида

Рассмотрим, наконец, общий случай, при котором σ_δ - произвольная кривая Ляпунова (δ - любое вещественное число). В пункте 2.2 мы решали своего рода обратную задачу – полагали в формуле (2.26) последовательно $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=n$ и находили такой контур σ_δ , для которого функция (2.26) является решением. Анализ доказательства теоремы 2.4 и методики получения явного представления решения позволяет сделать вывод о том, что ключевым моментом в доказательстве является установление соотношения

$$\operatorname{Re}(2\delta + i)^n + \operatorname{Im}(2\delta + i)^n = 0.$$

Именно для установления этого соотношения нам необходимо условие (2.35) (или эквивалентное ему условие (2.34)), что ограничивает полученное решение (2.41) лишь классом контуров.

Для общего случая (при любом вещественном δ) необходимо заменить натуральное n таким вещественным α , что

$$\operatorname{Re}(2\delta + i)^\alpha + \operatorname{Im}(2\delta + i)^\alpha = 0.$$

Отсюда, по аналогии с формулами (2.34) и (2.41), мы вправе ожидать, что функция

$$u(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\frac{\frac{3\pi}{4}+\pi k}{\gamma_\delta}} + \operatorname{Im}\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^{\frac{\frac{3\pi}{4}+\pi k}{\gamma_\delta}}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^{\frac{\frac{3\pi}{4}+\pi k}{\gamma_\delta}}, & y < 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

или функция

$$u(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^\alpha + \operatorname{Im}\left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}-1\right)^\alpha, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y}-1\right)^\alpha, & y < 0, \end{cases} \quad (2.45a)$$

где

$$\alpha = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.46)$$

а число γ_δ определяется по формуле (2.4), будет решением задачи (2.1)-(2.3) для произвольных контуров σ_δ .

Здесь мы встретились с необходимостью возведения комплексного числа в степень с произвольным вещественным показателем. Следуя [78, с.183], все значения степени комплексного числа

$$z = |z| \cdot (\cos \psi + i \sin \psi),$$

где $|z|$ - модуль комплексного числа z , $\psi = \operatorname{Arg} z$ - его аргумент, заключаются в формуле

$$z = |z|^\alpha \cdot (\cos \alpha \psi + i \sin \alpha \psi). \quad (2.47)$$

При этом мы получаем одно значение в случае, когда α есть целое число; несколько, а именно q различных значений в случае, когда α есть

рациональное число, представимое несократимой дробью $\frac{p}{q}$; и, наконец, бесконечное (счетное) множество различных значений в случае, когда α - иррациональное число.

Отметим также, что нам вполне достаточно одного значения степени, а именно соответствующего $\psi = \arg z$ (главному значению аргумента), точнее, для наших целей, нас интересует лишь случай $0 \leq \psi \leq \pi$. Именно в этом смысле мы везде далее будем использовать формулу (2.47).

Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2.5 *Существует разрывное в точке $B(1,0)$ решение однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (2.1)-(2.2)), причем выполнены условия (2.3)-(2.4). Данное решение определяется по формуле (2.45) или (2.45a), а сама задача является некорректной в классе разрывных функций.*

Доказательство:

Для упрощения вычислений будем использовать представление решения (2.45a), где число α определяется по формуле (2.46). Обозначим

$$w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^\alpha, \quad (2.48)$$

то есть

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y) \quad \text{при} \quad y > 0. \quad (2.49)$$

В дальнейшем, при проверке всех соотношений задачи Трикоми и нахождении частных производных от функции комплексного переменного будем пользоваться соотношениями (2.44).

Итак, докажем, что функция (2.45) (или (2.45a)) удовлетворяет соотношениям (2.1)-(2.4).

а) при $y < 0$ уравнение (2.1) записывается в виде

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.45a) при $y < 0$

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^\alpha,$$

имеем

$$u_x(x, y) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \left(-\frac{1}{(1-x-y)^2} \right) \cdot (-1) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^2};$$

$$u_{xx}(x, y) = \alpha(\alpha - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3};$$

$$u_y(x, y) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^2};$$

$$u_{yy}(x, y) = \alpha(\alpha - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= \alpha(\alpha - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} - \\ &\quad - \alpha(\alpha - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} - \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} = 0, \end{aligned}$$

так как $x + y \neq 1$ в Ω^- .

Таким образом, функция (2.45а) удовлетворяет уравнению (2.1) при $y < 0$.

При $y > 0$ уравнение (2.1) записывается в виде

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Согласно (2.45а), имеет место следующее представление функции $u(x, y)$ при $y > 0$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^\alpha + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^\alpha.$$

В силу соотношений (2.44), нам достаточно вычислить значение выражения

$$w_{xx} + w_{yy}, \quad \text{где} \quad w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^\alpha.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} w_x &= \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{(-1) \cdot ((1-x)^2 + y^2) - 2(1-x) \cdot (-1) \cdot (1-x+iy)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{-(1-x)^2 - y^2 + 2(1-x)^2 + 2(1-x)y \cdot i}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{(1-x)^2-y^2+2(1-x)y \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^2}; \\
w_{xx} &= \alpha(\alpha-1) \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-2} \cdot \left(\frac{(1-x)^2-y^2+2(1-x)y \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^2} \right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \times \\
&\times \frac{(-2(1-x)-2y \cdot i)((1-x)^2+y^2)^2 + 2((1-x)^2+y^2) \cdot 2(1-x) \cdot ((1-x)^2-y^2+2(1-x)y \cdot i)}{((1-x)^2+y^2)^4} = \\
&= \alpha(\alpha-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-2} \frac{(1-x)^4+y^4+4(1-x)^2y^2i^2-2(1-x)^2y^2+4(1-x)^3yi-4(1-x)y^3i}{((1-x)^2+y^2)^4} + \\
&+ \alpha \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \frac{-2(1-x)^3-2(1-x)^2yi-2(1-x)y^2-2y^3i+4(1-x)^3-4(1-x)y^2+8(1-x)^2yi}{((1-x)^2+y^2)^3} = \\
&= \alpha(\alpha-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-2} \frac{(1-x)^4+4(1-x)^3y \cdot i-6(1-x)^2y^2-4(1-x)y^3 \cdot i+y^4}{((1-x)^2+y^2)^4} + \\
&+ \alpha \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \frac{2(1-x)^3+6(1-x)^2y \cdot i-6(1-x)y^2-2y^3 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^3}; \\
w_y &= \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{i \cdot ((1-x)^2+y^2) - 2y \cdot (1-x+iy)}{((1-x)^2+y^2)^2} = \\
&= \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{(1-x)^2 \cdot i - 2(1-x)y - y^2 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^2}; \\
w_{yy} &= \alpha(\alpha-1) \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-2} \cdot \left(\frac{(1-x)^2 \cdot i - 2(1-x)y - y^2 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^2} \right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \times \\
&\times \frac{(-2(1-x)-2y \cdot i)((1-x)^2+y^2)^2 - 2((1-x)^2+y^2) \cdot 2y \cdot ((1-x)^2 \cdot i - 2(1-x)y - y^2 \cdot i)}{((1-x)^2+y^2)^4} = \\
&= \alpha(\alpha-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-2} \frac{(1-x)^4i^2+4(1-x)^2y^2+y^4i^2-4(1-x)^3yi-2(1-x)^2y^2i^2+4(1-x)y^3i}{((1-x)^2+y^2)^4} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \frac{-2(1-x)^3 - 2(1-x)^2 yi - 2(1-x)y^2 - 2y^3 i - 4(1-x)^2 yi + 8(1-x)y^2 + 4y^3 i}{((1-x)^2+y^2)^3} = \\
& = \alpha(\alpha-1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-2} \frac{-(1-x)^4 - 4(1-x)^3 y \cdot i + 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)y^3 \cdot i - y^4}{((1-x)^2+y^2)^4} + \\
& + \alpha \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \frac{-2(1-x)^3 - 6(1-x)^2 y \cdot i + 6(1-x)y^2 + 2y^3 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $w_{xx} + w_{yy} = 0$, так как $(1-x)^2 + y^2 \neq 0$ в Ω^+ , следовательно

$$\operatorname{Re}(w_{xx} + w_{yy}) + \operatorname{Im}(w_{xx} + w_{yy}) = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

В итоге, функция (2.45а) удовлетворяет уравнению (2.1) как при $y > 0$, так и при $y < 0$.

б) при $y < 0$ краевое условие (2.2) примет вид

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = 0.$$

Учитывая представление функции (2.45а) при $y < 0$

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^\alpha = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^\alpha,$$

имеем

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^\alpha \Big|_{x+y=0} = 0, \text{ так как } \alpha > 0.$$

Таким образом, функция (2.45а) удовлетворяет гиперболической части краевого условия (2.2).

При $y > 0$ краевое условие (2.2) примет вид

$$u|_{\sigma_\delta} = 0.$$

Представление функции (2.41) при $y > 0$ следующее

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y),$$

где

$$w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^\alpha = \left(\frac{1-x+iy-(1-x)^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha = \left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha.$$

Как видно из доказательства теоремы 2.4, преобразованное выражение для контура σ_δ имеет вид:

$$2y\delta = (1-x) - (1-x)^2 - y^2.$$

Таким образом, краевое условие запишется как $u|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta} = 0$. Имеем, учитывая определение (2.4) числа γ_δ :

$$\begin{aligned} w_{\sigma_\delta} &= \left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha \Big|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta} = \left(\frac{2y\delta+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha = \\ &= \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha (2\delta+i)^n = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha (\operatorname{ctg}\gamma_\delta+i)^\alpha = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha \left(\frac{\cos\gamma_\delta}{\sin\gamma_\delta}+i \right)^\alpha = \\ &= \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha \left(\frac{\cos\gamma_\delta+i\sin\gamma_\delta}{\sin\gamma_\delta} \right)^\alpha = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\sin\gamma_\delta} \right)^\alpha (\cos\alpha\gamma_\delta+i\sin\alpha\gamma_\delta); \end{aligned}$$

следовательно,

$$u|_{\sigma_\delta} = (\operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y))|_{\sigma_\delta} = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^\alpha \left(\frac{1}{\sin\gamma_\delta} \right)^\alpha (\cos\alpha\gamma_\delta + \sin\alpha\gamma_\delta);$$

но, согласно условию (2.46),

$$\alpha = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta} \Rightarrow \alpha\gamma_\delta = \frac{3\pi}{4} + \pi k \Rightarrow \cos\alpha\gamma_\delta + \sin\alpha\gamma_\delta = 0.$$

Таким образом,

$$u|_{\sigma_\delta} = 0.$$

В итоге, краевое условие (2.2) выполнено полностью для функции (2.45a).

в) при $y < 0$ функция (2.45a) имеет вид

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^\alpha,$$

откуда

$$u_y(x, y) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^2},$$

$$u(x, -0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha},$$

$$u_y(x, -0) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

При $y > 0$ имеем:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y),$$

где

$$w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha}.$$

Следовательно, с учетом соотношений (2.44), получим последовательно:

$$w_y(x, y) = \alpha \cdot \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{i \cdot ((1-x)^2+y^2) - 2y \cdot (1-x+iy)}{((1-x)^2+y^2)^2},$$

$$w(x, +0) = \left(\frac{1-x}{(1-x)^2} - 1 \right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha} \Rightarrow u(x, +0) = \operatorname{Re} w(x, +0) + \operatorname{Im} w(x, +0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha},$$

$$w_y(x, +0) = \alpha \cdot \left(\frac{1-x}{(1-x)^2} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{i \cdot (1-x)^2}{(1-x)^4} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_y(x, +0) = \operatorname{Re} w_y(x, +0) + \operatorname{Im} w_y(x, +0) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким образом, для функции (2.45а)

$$u(x, -0) = u(x, +0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha},$$

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0) = \alpha \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2},$$

и условия (2.3) выполнены.

В итоге, функция (2.45a) является решением однородной задачи Трикоми (2.1)-(2.2), причем выполнены условия (2.3). Но, как легко видеть, функция (2.45a) является разрывной в точке $B(1,0)$.

Теорема 2.5 доказана полностью.

Анализируя результаты доказанных теорем, прежде всего теоремы 2.5, можно сделать следующие выводы:

1. Для каждого контура σ_δ , то есть для каждого δ , существует бесконечное множество разрывных решений вида (2.45).

2. Первое из решений вида (2.45), соответствующее значению $k=0$, имеет

особенность $\alpha = \frac{3\pi}{\gamma_\delta}$; при $\gamma_\delta > \frac{3\pi}{4}$ эта особенность меньше 1; чем меньше

угол γ_δ , тем больше особенность решения в точке $B(1,0)$.

3. Каждое из последующих решений вида (2.45), соответствующих $k=1,2,\dots$, будет иметь особенность: $>1, >2, \dots$, причем особенность может быть сколь угодно большой.

4. Учитывая значение следа производной по y функции (2.45) на AB :

$u_y(x,0) = \alpha \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \alpha \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$, видно, что при $\alpha-1 < 0$, то

есть при $\alpha = \frac{3\pi}{\gamma_\delta} < 1$ или $\gamma_\delta > \frac{3\pi}{4}$, производная по y функции (2.45) имеет

особенность порядка меньше 1 (для $k=0$) также и в точке $A(0,0)$.

5. При различных значениях γ_δ , за счет различных значений k , как видно из формулы (2.46), могут получаться одинаковые значения α и соответствующие им одинаковые решения вида (2.45) или (2.45a).

Например, при $\gamma_\delta = \frac{3\pi}{8}$ и $k=0$: $\alpha = \frac{\frac{3\pi}{8}}{\frac{3\pi}{8}} = 1$; а при $\gamma_\delta = \frac{7\pi}{8}$ и $k=1$:

$\alpha = \frac{\frac{3\pi}{8} + \pi}{\frac{7\pi}{8}} = 2$. Таким образом, одно и то же значение α и

соответствующее ему решение (2.45a) может удовлетворять однородной задаче Трикоми для различных значений δ (что подтверждается рассмотренными случаями $n=2$, $n=3$ и $n=n$).

3 Неоднородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

3.1 Формулировка результатов и классов решений

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y < 0$ - характеристиками $AC: x + y = 0$ и $BC: x - y = 1$ уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (3.1)$$

а при $y > 0$ - дугой окружности

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad y > 0 \right\},$$

рассмотрим задачу Трикоми (задачу Т): найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее краевому условию

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0, \quad (3.2)$$

причем должны выполняться следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y = 0\}$:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0), \quad 0 < x < 1. \quad (3.3)$$

Кроме того, наряду с задачей Т, рассмотрим сопряженную к ней задачу Т*

$$\operatorname{sgn} y v_{xx} + v_{yy} = g(x, y), \quad (3.1^*)$$

$$v|_{\sigma_\delta \cup BC} = 0, \quad (3.2^*)$$

$$v(x, +0) = v(x, -0), \quad v_y(x, +0) = v_y(x, -0), \quad 0 < x < 1. \quad (3.3^*)$$

Будем говорить, что функция $h(x, y)$ принадлежит классу $C_{A,B}^{\alpha,\beta}(\overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда $|x|^\alpha |1-x|^\beta h(x, y) \in C(\overline{\Omega})$. Как обычно, $\Omega_1 = \Omega \cap y > 0$, $\Omega_2 = \Omega \cap y < 0$. Под решением задачи будем понимать функции из класса $C^2(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2) \cap C^1(\Omega)$.

Иными словами, принадлежность функции $h(x, y)$ классу $C_{A,B}^{\alpha,\beta}(\overline{\Omega})$ означает, что:

1) функция $h(x, y)$ может быть разрывной порядка вплоть до α в точке А при $\alpha > 0$, либо обращается в нуль порядка $|\alpha|$ (либо большего порядка) в той же точке А при $\alpha < 0$;

2) аналогично, функция $h(x, y)$ может быть разрывной порядка вплоть до β в точке B при $\beta > 0$, либо обращается в нуль порядка $|\beta|$ (либо большего порядка) в той же точке B при $\beta < 0$.

Обозначим угол подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения, то есть угол между касательной к кривой в точках A или B и отрезком AB , следующим образом

$$\gamma_\delta = \text{arcctg} 2\delta, \quad 0 < \gamma_\delta < \pi. \quad (3.4)$$

Для однородных задач T и T^* (при $f \equiv 0$ и $g \equiv 0$ соответственно) имеют место следующие теоремы (отметим, что теорема 3.1 является уточнением теоремы 2.5, доказанной в предыдущем разделе).

Теорема 3.1 *Существует бесконечное множество решений $u_k(x, y) \in C_{A,B}^{-\alpha_k, \alpha_k}(\overline{\Omega})$ однородной ($f \equiv 0$) задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (3.1)-(3.2)), причем выполнены условия (3.3). Данные решения определяются по формуле*

$$u_k(x, y) = \begin{cases} \text{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} + \text{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y < 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где

$$\alpha_k = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.6)$$

Кроме того $u_k(x, y) \notin L_2(\Omega)$ при $k \geq 1$. А $u_0(x, y) \in L_2(\Omega)$ только при выполнении условия

$$\gamma_\delta > \frac{3\pi}{4}. \quad (3.7)$$

Теорема 3.2 *Существует бесконечное множество решений $v_k(x, y) \in C_{A,B}^{\alpha_k, -\alpha_k}(\overline{\Omega})$ однородной ($g \equiv 0$) задачи T^* (задачи (3.1*)-(3.2*)), причем выполнены условия (3.3*). Данные решения определяются по формуле*

$$v_k(x, y) = \begin{cases} \text{Re} \left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} + \text{Im} \left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{x-y} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y < 0, \end{cases} \quad (3.5^*)$$

где α_k определяется из соотношения (3.6). Кроме того, при выполнении условия (3.7) решение (3.5*), соответствующее $k=0$ в соотношении (3.6), будет также принадлежать классу $L_2(\Omega)$, то есть $v_0(x, y) \in L_2(\Omega)$.

Доказательство теоремы 3.1: Обозначим $w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha_k}$, то есть

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y) \quad \text{при} \quad y > 0.$$

Докажем, что функции (3.5) удовлетворяют соотношениям (3.1)-(3.3).

1) При $y < 0$ уравнение (3.1) записывается в виде $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Учитывая представление функций (3.5) при $y < 0$: $u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k}$, имеем

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) &= \alpha_k(\alpha_k - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + \alpha_k \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3}; \\ u_{yy}(x, y) &= \alpha_k(\alpha_k - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + \alpha_k \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= \alpha_k(\alpha_k - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} + \alpha_k \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} - \\ &- \alpha_k(\alpha_k - 1) \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 2} \cdot \frac{1}{(1-x-y)^4} - \alpha_k \cdot \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{2}{(1-x-y)^3} = 0, \end{aligned}$$

так как $x + y \neq 1$ в Ω^- .

Таким образом, функции (3.5) удовлетворяют уравнению (3.1) при $y < 0$. При $y > 0$ уравнение (3.1) записывается в виде $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Согласно (3.5), имеет место следующее представление функции $u(x, y)$ при $y > 0$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha_k}.$$

Предварительно вычислим значение выражения

$$w_{xx} + w_{yy}, \quad w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha_k}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
w_{xx} &= \alpha_k (\alpha_k - 1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k-2} \frac{(1-x)^4 + 4(1-x)^3 y \cdot i - 6(1-x)^2 y^2 - 4(1-x)y^3 \cdot i + y^4}{((1-x)^2+y^2)^4} + \\
&\quad + \alpha_k \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k-1} \frac{2(1-x)^3 + 6(1-x)^2 y \cdot i - 6(1-x)y^2 - 2y^3 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^3}; \\
w_{yy} &= \alpha_k (\alpha_k - 1) \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k-2} \frac{-(1-x)^4 - 4(1-x)^3 y \cdot i + 6(1-x)^2 y^2 + 4(1-x)y^3 \cdot i - y^4}{((1-x)^2+y^2)^4} + \\
&\quad + \alpha_k \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k-1} \frac{-2(1-x)^3 - 6(1-x)^2 y \cdot i + 6(1-x)y^2 + 2y^3 \cdot i}{((1-x)^2+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $w_{xx} + w_{yy} = 0$, так как $(1-x)^2 + y^2 \neq 0$ в Ω^+ , следовательно

$$\operatorname{Re}(w_{xx} + w_{yy}) + \operatorname{Im}(w_{xx} + w_{yy}) = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

В итоге, функции (3.5) удовлетворяют уравнению (3.1) как при $y > 0$, так и при $y < 0$.

2) При $y < 0$ краевое условие (3.2) примет вид $u|_{AC} = u|_{x+y=0} = 0$. Учитывая представление функций (3.5) при $y < 0$

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k} = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^{\alpha_k},$$

имеем

$$u|_{AC} = u|_{x+y=0} = \left(\frac{x+y}{1-x-y} \right)^{\alpha_k} \Big|_{x+y=0} = 0, \text{ так как } \alpha_k > 0.$$

Таким образом, функции (3.5) удовлетворяют гиперболической части краевого условия (3.2).

При $y > 0$ краевое условие (3.2) примет вид $u|_{\sigma_\delta} = 0$. Представление функций (3.5) при $y > 0$ следующее $u(x, y) = \operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y)$, где

$$w(x, y) = \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} = \left(\frac{1-x+iy-(1-x)^2-y^2}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} = \left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k}.$$

Преобразованное выражение для контура σ_δ имеет вид: $2y\delta = (1-x) - (1-x)^2 - y^2$.

Таким образом, краевое условие запишется как $u|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta} = 0$. Имеем, учитывая определение (3.4) числа γ_δ :

$$\begin{aligned}
w(x, y)|_{\sigma_\delta} &= \left(\frac{1-x-(1-x)^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} \Big|_{(1-x)-(1-x)^2-y^2=2y\delta} = \left(\frac{2y\delta+iy}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} = \\
&= \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} (2\delta+i)^{\alpha_k} = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} (\operatorname{ctg} \gamma_\delta + i)^{\alpha_k} = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} \left(\frac{\cos \gamma_\delta}{\sin \gamma_\delta} + i \right)^{\alpha_k} = \\
&= \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} \left(\frac{\cos \gamma_\delta + i \sin \gamma_\delta}{\sin \gamma_\delta} \right)^{\alpha_k} = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} \left(\frac{1}{\sin \gamma_\delta} \right)^{\alpha_k} (\cos \alpha_k \gamma_\delta + i \sin \alpha_k \gamma_\delta);
\end{aligned}$$

следовательно,

$$u|_{\sigma_\delta} = (\operatorname{Re} w(x, y) + \operatorname{Im} w(x, y))|_{\sigma_\delta} = \left(\frac{y}{(1-x)^2+y^2} \right)^{\alpha_k} \left(\frac{1}{\sin \gamma_\delta} \right)^{\alpha_k} (\cos \alpha_k \gamma_\delta + \sin \alpha_k \gamma_\delta);$$

но, согласно условию (3.6),

$$\alpha_k = \frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta} \Rightarrow \alpha_k \gamma_\delta = \frac{3\pi}{4} + \pi k \Rightarrow \cos \alpha_k \gamma_\delta + \sin \alpha_k \gamma_\delta = 0.$$

Таким образом, $u|_{\sigma_\delta} = 0$.

В итоге, краевое условие (3.2) выполнено полностью для функций (3.5).

3) Для проверки условий (3.3) получим из представления функций (3.5)

$$\begin{aligned}
u(x, -0) &= u(x, +0) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha_k}, \\
u_y(x, -0) &= u_y(x, +0) = \alpha_k \cdot \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)^{\alpha_k - 1} \cdot \frac{1}{(1-x)^2},
\end{aligned}$$

и условия (3.3) выполнены.

В итоге, функции (3.5) является решением однородной задачи Трикоми (3.1)-(3.2), причем выполнены условия (3.3). Но, как легко видеть, каждая из функций (3.5) принадлежит классу $C^2(\overline{\Omega} \setminus \{A, B\}) \cap C^{-\alpha_k, \alpha_k}(\{A, B\})$, где α_k определяется по формуле (3.6).

Докажем, наконец, заключительное утверждение теоремы. Выясним, при каких углах подхода и какие решения $u_k(x, y)$ принадлежат классу $L_2(\Omega)$. Для этого проверим выполнение соотношения

$$\|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} |u_k(x, y)|^2 dx dy < \infty. \quad (3.8)$$

Обозначив через Ω^+ и Ω^- эллиптическую и гиперболическую части области Ω соответственно, получим последовательно

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |u_k(x, y)|^2 dx dy &= \iint_{\Omega^-} |u_k(x, y)|^2 dx dy + \iint_{\Omega^+} |u_k(x, y)|^2 dx dy; \\ \iint_{\Omega^-} |u_k(x, y)|^2 dx dy &= \iint_{\Omega^-} \left| \frac{1}{1-x-y} - 1 \right|^{2\alpha_k} dx dy = \iint_{\Omega^-} \left(\frac{x+y}{1-(x+y)} \right)^{2\alpha_k} dx dy < \iint_{\Omega^-} (1-(x+y))^{-2\alpha_k} dx dy = \\ &= \left| \begin{array}{l} x+y=\xi \quad x=\frac{\xi+\eta}{2} \quad \frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{1}{2} \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}=\frac{1}{2} \quad |J|=\left| -\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \right|=\frac{1}{2} \\ x-y=\eta \quad y=\frac{\xi-\eta}{2} \quad \frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{1}{2} \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}=-\frac{1}{2} \quad dx dy=\frac{1}{2} d\xi d\eta \end{array} \right| = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^-} (1-\xi)^{-2\alpha_k} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 d\eta \int_0^\eta (1-\xi)^{-2\alpha_k} d\xi = -\frac{1}{2(1-2\alpha_k)} \int_0^\eta (1-\xi)^{1-2\alpha_k} \Big|_0^\eta d\eta = \frac{1}{2(2\alpha-1)} \int_0^1 ((1-\eta)^{1-2\alpha_k} - 1) d\eta < \infty \end{aligned}$$

при $1-2\alpha_k > -1 \Leftrightarrow \alpha_k < 1$;

$$\iint_{\Omega^+} |u_k(x, y)|^2 dx dy:$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, \quad y = \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}; \quad r = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x(1-x) - y^2}; \\ 1-x &= \frac{1+r \cos \varphi}{1+2r \cos \varphi + r^2}, \quad (1-x)^2 + y^2 = \frac{1}{1+2r \cos \varphi + r^2}; \quad \frac{1-x+iy}{x^2+y^2} - 1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi); \\ \left(\frac{1-x+iy}{x^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} &= r^{\alpha_k} (\cos \alpha_k \varphi + i \sin \alpha_k \varphi); \\ u_k(x, y) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{x^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{x^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} = r^{\alpha_k} (\cos \alpha_k \varphi + \sin \alpha_k \varphi); \\ |u_k(x, y)|^2 &= r^{2\alpha_k} (1 + \sin 2\alpha_k \varphi); \\ \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{r^2 \cos \varphi + 2r + \cos \varphi}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{r(r^2-1) \sin \varphi}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2}; \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= -\frac{(r^2-1) \sin \varphi}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{r(r^2 \cos \varphi + 2r + \cos \varphi)}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2}; \\ |J| &= \frac{r}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2}; \quad \Omega^+: \quad \begin{array}{l} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi \leq \gamma_\delta \end{array}. \\ \iint_{\Omega^+} |u_k(x, y)|^2 dx dy &= \iint_{\Omega^+} \frac{r^{2\alpha_k} (1 + \sin 2\alpha_k \varphi) \cdot r}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2} dr d\varphi = \int_0^{\gamma_\delta} (1 + \sin 2\alpha_k \varphi) d\varphi \int_0^\infty \frac{r^{2\alpha_k+1} dr}{(1+2r \cos \varphi + r^2)^2} < \infty \end{aligned}$$

при $2\alpha+1+1-4 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$.

Таким образом, соотношение (3.8) выполнено при следующем условии:

$$\alpha < 1.$$

Учитывая определение (3.6) числа α , видно, что соотношение (3.8) выполняется лишь для $k = 0$, причем

$$\frac{3\pi}{4\gamma_\delta} < 1 \Leftrightarrow \gamma_\delta > \frac{3\pi}{4},$$

то есть необходимость и достаточность условия (3.7) доказана.

Теорема 3.1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 3.2 полностью аналогично доказательству теоремы 3.1.

Перейдем к рассмотрению неоднородных задач T и T^* (задач (3.1)-(3.3) и (3.1*)-(3.3*) соответственно). Назовем n -регулярным решением задачи T (T^*) решение принадлежащее классу

$$u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C_{A,B}^{-n,0}(\bar{\Omega}) \quad (v(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C_{A,B}^{0,-n}(\bar{\Omega})).$$

Это означает, к примеру, что 1-регулярное решение задачи T $u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяет уравнению (3.1) в области $\bar{\Omega}$, краевому условию (3.2) и условиям согласования (3.3), а также обращается в нуль порядка 1 в точке $A(0,0)$.

Для неоднородных задач T и T^* имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.3 *Необходимым и достаточным условием n -регулярности решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задачи (3.1)-(3.3)) для любой правой части $f(x, y) \in C(\Omega)$ является условие:*

$$\gamma_\delta < \frac{3\pi}{4n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Для n -регулярности решения при любых углах подхода γ_δ на правую часть уравнения (1) должно быть наложено n условий

$$\iint_{\Omega} v_k(x, y) f(x, y) dx dy = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.10)$$

где функции v_k определяются по формуле (5*).

Теорема 3.4 *Необходимым и достаточным условием n -регулярности решения задачи T^* (задачи (3.1*)-(3.3*)) для любой правой части $g(x, y) \in C(\Omega)$ является условие (3.9). Для n -регулярности решения при любых углах подхода γ_δ на правую часть уравнения (3.1*) должно быть наложено n условий*

$$\iint_{\Omega} u_k(x, y) g(x, y) dx dy = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.10^*)$$

где функции u_k определяются по формуле (3.5).

3.2 Исследование задачи в гиперболической части области

Отметим общий ход решения задачи Трикоми. Будем решать отдельно соответствующие краевые задачи в гиперболической и эллиптической частях области Ω соответственно, считая как бы известными функцию $\nu(x)$ в гиперболической части области и функцию $\tau(x)$ - в ее эллиптической части. В результате получим решения обеих задач и вытекающие из них соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$. В свою очередь, из этих соотношений можно будет выразить функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, исследовать их свойства и, таким образом, установить свойства решений исходной задачи Трикоми. Заметим также, что для нахождения решения в эллиптической части области нам потребуется оперировать с преобразованиями Меллина исходных данных и решений задачи.

Доказательство проведем для теоремы 3.3. Доказательство теоремы 3.4 будет полностью аналогичным.

Доказательство. Обозначим

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (3.11)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x). \quad (3.12)$$

В гиперболической части области Ω рассмотрим задачу Коши-Гурса (Дарбу), получающуюся из задачи (3.1)-(3.3), считая как бы известной функцию (3.12)

$$-u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$$

$$u|_{AC} = 0,$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x).$$

Решение этой задачи выписывается в виде [69, с. 118 – 121]

$$u(x, y) = \int_0^{x+y} \nu(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{x+y} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{x-y} f\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1. \quad (3.13)$$

Полагая $y = 0$, получим следующее выражение для функции $\tau(x) \equiv u(x, 0)$:

$$\tau(x) = \int_0^x \nu(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x f\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1.$$

Проведя замену

$$x = \frac{x_1}{1+x_1}, \quad t = \frac{t_1}{1+t_1},$$

откуда

$$x_1 = \frac{x}{1-x}, \quad t_1 = \frac{t}{1-t},$$

получим

$$\tau\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right) = \int_0^{x_1} \frac{v\left(\frac{t_1}{1+t_1}\right)}{(1+t_1)^2} dt_1 + F_1\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right), \quad (3.14)$$

где

$$F_1(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x f\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1.$$

Заметим, что при $0 < x < 1$ имеем $0 < x_1 < +\infty$.

Проведя еще одну замену $t_1 = x_1 \theta$, откуда $\theta = \frac{t_1}{x_1}$, соотношение (3.14)

можно записать в виде

$$\tau\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right) = x_1 \int_0^1 \frac{v\left(\frac{x_1 \theta}{1+x_1 \theta}\right)}{(1+x_1 \theta)^2} d\theta + F_1\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right). \quad (3.15)$$

К обеим частям равенства (3.15) применим преобразование Меллина

$$F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx.$$

Используя формулу [79, с. 269]

$$\int_0^\infty x^{s-1} dx \cdot x^\alpha \int_0^\infty \theta^\beta u(x\theta) v(\theta) d\theta = \int_0^\infty x^{s+\alpha-1} u(x) dx \cdot \int_0^\infty x^{-s-\alpha+\beta} v(x) dx,$$

получим, полагая

$$\alpha = 1,$$

$$\beta = 0,$$

$$u(x_1) = \frac{v\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^2} \quad \text{или} \quad u(x_1\theta) = \frac{v\left(\frac{x_1\theta}{1+x_1\theta}\right)}{(1+x_1\theta)^2},$$

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

следующее соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x_1^{s-1} dx_1 \cdot x_1 \int_0^1 \frac{v\left(\frac{x_1\theta}{1+x_1\theta}\right) d\theta}{(1+x_1\theta)^2} &= \int_0^\infty x_1^s \frac{v\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^2} dx_1 \cdot \int_0^1 x_1^{-s-1} dx_1 = \frac{x_1^{-s}}{-s} \Big|_0^1 \cdot \int_0^\infty x_1^s \frac{v\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^2} dx_1 = \\ &= | -s > 0 \Rightarrow s < 0 | = -\frac{1}{s} \int_0^\infty x_1^s \frac{v\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^2} dx_1. \end{aligned}$$

Отметим, что при этом должно быть выполнено условие

$$s < 0. \quad (3.16)$$

Таким образом, из формулы (3.15) после применения преобразования Меллина имеем

$$\int_0^\infty x^{s-1} \tau\left(\frac{x}{1+x}\right) dx = -\frac{1}{s} \int_0^\infty x_1^s \cdot \frac{v\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^2} dx_1 + \int_0^\infty x^{s-1} F_1\left(\frac{x}{1+x}\right) dx.$$

Обозначив

$$\bar{\tau}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \tau\left(\frac{x}{1+x}\right) dx, \quad (3.17)$$

$$\bar{v}(s) = \int_0^\infty x^s \frac{v\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^2} dx = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot \frac{x}{(1+x)^2} v\left(\frac{x}{1+x}\right) dx, \quad (3.18)$$

$$\bar{F}_1(s) = \int_0^\infty x^{s-1} F_1\left(\frac{x}{1+x}\right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^\infty x^{s-1} \int_0^{\frac{x}{1+x}} d\xi_1 \int_{\xi_{11}}^{\frac{x}{1+x}} f\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1, \quad (3.19)$$

получим

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{s}\bar{\nu}(s) + \bar{F}_1(s). \quad (3.20)$$

Равенство (3.20) есть основное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученное в ходе решения задачи Коши-Гурса в гиперболической части.

Отметим, что соотношение (3.20) связывает не сами функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, а их образы, полученные в результате применения преобразования Меллина, при этом, как следует из определений (3.11)-(3.12) функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ и (3.17)-(3.18) функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$, если гладкость или особенности функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ должны отличаться на 1, то гладкость или особенности функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$ уже не отличаются.

3.3 Исследование задачи в эллиптической части области

В эллиптической части области Ω рассмотрим следующую задачу Дирихле

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f(x, y), \\ u|_{\sigma_\delta} &= 0, \\ u(x, 0) &= \tau(x). \end{aligned}$$

Сделаем следующую замену переменных

$$x = \frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, y = \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}}, \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x(1-x) - y^2}. \quad (3.21)$$

а также замену функции

$$u(x, y) = u_3 \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x(1-x) - y^2} \right) \Leftrightarrow u(x, y) = u_3(r_1, \varphi_1).$$

В результате для уравнения $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ получим последовательно следующие соотношения.

$$1 - x = 1 - \frac{r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} = \frac{1 + r_1 \cos \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2};$$

$$1 - 2x = 1 - \frac{2r_1^2 + 2r_1 \cos \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} = \frac{1 - r_1^2}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2};$$

$$x(1-x) + y^2 = \frac{(r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1)(1 + r_1 \cos \varphi_1)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} =$$

$$= \frac{r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1 + r_1^3 \cos \varphi_1 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} =$$

$$= \frac{r_1(r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2};$$

$$x^2 + y^2 = \frac{(r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1)^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{r_1^4 + 2r_1^3 \cos \varphi_1 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} =$$

$$= \frac{r_1^4 + 2r_1^3 \cos \varphi_1 + r_1^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{r_1^2(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{r_1^2}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2};$$

$$(1-x)^2 + y^2 = \frac{(1 + r_1 \cos \varphi_1)^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2};$$

$$x(1-x) - y^2 = \frac{(r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1)(1 + r_1 \cos \varphi_1)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} - \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} =$$

$$= \frac{r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1 + r_1^3 \cos \varphi_1 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1 - r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{r_1 \cos \varphi_1 + r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 \cos^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} =$$

$$= \frac{r_1 \cos \varphi_1(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{r_1 \cos \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2};$$

$$(x(1-x) - y^2)^2 + y^2 = \frac{r_1^2 \cos^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} = \frac{r_1^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2};$$

$$r_{1x} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}}} \cdot \frac{2x((1-x)^2 + y^2) + 2(1-x)(x^2 + y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \frac{x(1-x)^2 + xy^2 + x^2(1-x) + y^2(1-x)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{x(1-x)(1-x+x) + xy^2 + y^2 - xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(1-x) + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r_1(r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} \\
&= \frac{r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1}{\left(\frac{r_1^2}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1;
\end{aligned}$$

$$r_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}}} \cdot \frac{2y((1-x)^2 + y^2) - 2y(x^2 + y^2)}{((1-x)^2 + y^2)^2} = \frac{y(1-2x + x^2 + y^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{y(1-2x)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{r_1 \sin \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{1 - r_1^2}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2}}{\left(\frac{r_1^2}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = (1 - r_1^2) \sin \varphi_1;$$

$$\varphi_{1x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(x(1-x) - y^2)^2}} \cdot y \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x(1-x) - y^2)^2} \cdot (1-2x) = -\frac{y(1-2x)}{(x(1-x) - y^2)^2 + y^2} =$$

$$= \frac{\frac{r_1 \sin \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{1 - r_1^2}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2}}{\frac{r_1^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2}} = -\frac{(1 - r_1^2) \sin \varphi_1}{r_1};$$

$$\varphi_{1y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(x(1-x) - y^2)^2}} \cdot \frac{1 \cdot (x(1-x) - y^2) + 2y \cdot y}{(x(1-x) - y^2)^2} = \frac{x(1-x) - y^2 + 2y^2}{(x(1-x) - y^2)^2 + y^2} = \frac{x(1-x) + y^2}{(x(1-x) - y^2)^2 + y^2} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{r_1(r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} \\
&= \frac{r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1}{\frac{r_1^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2}} = \frac{r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1}{r_1};
\end{aligned}$$

$$r_{1xx} = \left(\frac{x(1-x) + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_x = \frac{(1-2x)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + y^2)((1-x)^2 + y^2)^3} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left((x(1-x) + y^2) \cdot \left(\frac{1 \cdot 2x}{2(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot ((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot ((1-x)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2(1-x) \cdot (-1) \right) \right)}{(x^2 + y^2)((1-x)^2 + y^2)^3} = \\
& = \frac{(1-2x)(x^2 + y^2)((1-x)^2 + y^2) - (x(1-x) + y^2)(x((1-x)^2 + y^2) - 3(1-x)(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \\
& = \frac{\frac{1-r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2}}{\left(\frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{r_1(r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)}{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} \times \\
& \times \frac{\left(\frac{r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} - 3 \cdot \frac{1+r_1 \cos \varphi_1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)}{\left(\frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{5}{2}}} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)r_1^2(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) - r_1^2(r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)(r_1 + \cos \varphi_1 - 3r_1(1+r_1 \cos \varphi_1))}{r_1^3} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) - (r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)(r_1 + \cos \varphi_1 - 3r_1 - 3r_1^2 \cos \varphi_1)}{r_1} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + (r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)(3r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 - \cos \varphi_1)}{r_1} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)}{r_1} + \\
& + \frac{3r_1^4 \cos^2 \varphi_1 + 6r_1^3 \cos \varphi_1 + 3r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2r_1^3 \cos \varphi_1 + 4r_1^2 + 2r_1 \cos \varphi_1 - r_1^2 \cos^2 \varphi_1 - 2r_1 \cos \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1}{r_1} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + 3r_1^4 \cos^2 \varphi_1 + 8r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1^2 - \cos^2 \varphi_1}{r_1},
\end{aligned}$$

$$r_{1,y} = \left(\frac{y(1-2x)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right)_y = \frac{(1-2x)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + y^2)((1-x)^2 + y^2)^3} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{y(1-2x) \cdot \left(\frac{1 \cdot 2y}{2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot ((1-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot ((1-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y \right)}{(x^2+y^2)((1-x)^2+y^2)^3} = \\
& = \frac{(1-2x)(x^2+y^2)((1-x)^2+y^2) - y^2(1-2x)((1-x)^2+y^2+3(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}((1-x)^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \\
& = \frac{\frac{1-r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2}}{\left(\frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{5}{2}}} - \\
& - \frac{\frac{1-r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} \cdot \left(\frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} + 3 \cdot \frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)}{\left(\frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right)^{\frac{5}{2}}} = \\
& = (1-r_1^2) \cdot \frac{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) - \sin^2 \varphi_1 (1+3r_1^2)}{r_1} = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) - (1-r_1^2)(1+3r_1^2) \sin^2 \varphi_1}{r_1} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) - (1-r_1^2 + 3r_1^2 - 3r_1^4)(1 - \cos^2 \varphi_1)}{r_1} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + (1+2r_1^2 - 3r_1^4)(\cos^2 \varphi_1 - 1)}{r_1} = \\
& = \frac{(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + \cos^2 \varphi_1 + 2r_1^2 \cos^2 \varphi_1 - 3r_1^4 \cos^2 \varphi_1 - 1 - 2r_1^2 + 3r_1^4}{r_1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1xx} &= \left(- \frac{y(1-2x)}{(x(1-x)-y^2)^2 + y^2} \right)_x = \\
&= - \frac{2y \cdot ((x(1-x)-y^2)^2 + y^2) - 2(x(1-x)-y^2)(1-2x) \cdot y(1-2x)}{((x(1-x)-y^2)^2 + y^2)^2} = \\
&= \frac{2y \cdot ((x(1-x)-y^2)^2 + y^2 + (1-2x)^2(x(1-x)-y^2))}{((x(1-x)-y^2)^2 + y^2)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \frac{r_1 \sin \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \left(\frac{r_1^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} + \frac{(1 - r_1^2)^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} \cdot \frac{r_1 \cos \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right) \\
&= \frac{r_1^4}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^4} = \\
&= \frac{2r_1^2 \sin \varphi_1 (r_1 (1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + (1 - r_1^2)^2 \cos \varphi_1)}{r_1^4} = \\
&= \frac{2 \sin \varphi_1 (r_1 + 2r_1^2 \cos \varphi_1 + r_1^3 + \cos \varphi_1 - 2r_1^2 \cos \varphi_1 + r_1^4 \cos \varphi_1)}{r_1^2} = \frac{2 \sin \varphi_1 (r_1^4 \cos \varphi_1 + r_1^3 + r_1 + \cos \varphi_1)}{r_1^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{1yy} &= \left(-\frac{x(1-x) + y^2}{(x(1-x) - y^2)^2 + y^2} \right)_y = \\
&= \frac{2y \cdot ((x(1-x) - y^2)^2 + y^2) - (x(1-x) + y^2)(2(x(1-x) - y^2) \cdot (-2y) + 2y)}{((x(1-x) - y^2)^2 + y^2)^2} = \\
&= \frac{2y \cdot ((x(1-x) - y^2)^2 + y^2 - (x(1-x) + y^2)(1 - 2(x(1-x) - y^2)))}{((x(1-x) - y^2)^2 + y^2)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \frac{r_1 \sin \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \cdot \left(\frac{r_1^2}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} - \frac{r_1 (r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} \left(1 - 2 \frac{r_1 \cos \varphi_1}{1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} \right) \right) \\
&= \frac{r_1^4}{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^4} = \\
&= \frac{2r_1^2 \sin \varphi_1 (r_1 (1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) - (r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)(1 + r_1^2))}{r_1^4} = \\
&= \frac{2 \sin \varphi_1 (r_1 + 2r_1^2 \cos \varphi_1 + r_1^3 - r_1^2 \cos \varphi_1 - 2r_1 - \cos \varphi_1 - r_1^4 \cos \varphi_1 - 2r_1^3 - r_1^2 \cos \varphi_1)}{r_1^2} = \\
&= \frac{2 \sin \varphi_1 (-r_1^4 \cos \varphi_1 - r_1^3 - r_1 - \cos \varphi_1)}{r_1^2} = - \frac{2 \sin \varphi_1 (r_1^4 \cos \varphi_1 + r_1^3 + r_1 + \cos \varphi_1)}{r_1^2},
\end{aligned}$$

$$u_x = u_{3r_1} \cdot r_{1x} + u_{3\varphi_1} \cdot \varphi_{1x} = (r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1) u_{3r_1} - \frac{(1 - r_1^2) \sin \varphi_1}{r_1} u_{3\varphi_1};$$

$$u_y = u_{3r_1} \cdot r_{1y} + u_{3\varphi_1} \cdot \varphi_{1y} = (1 - r_1^2) \sin \varphi_1 \cdot u_{3r_1} + \frac{r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1}{r_1} u_{3\varphi_1};$$

$$u_{xx} = u_{3r_1} \cdot r_{1xx} + u_{3r_1r_1} \cdot r_{1x}^2 + 2u_{3r_1\varphi_1} \cdot r_{1x} \cdot \varphi_{1x} + u_{3\varphi_1} \cdot \varphi_{1xx} + u_{3\varphi_1\varphi_1} \cdot \varphi_{1x}^2;$$

$$u_{yy} = u_{3r_1} \cdot r_{1yy} + u_{3r_1r_1} \cdot r_{1y}^2 + 2u_{3r_1\varphi_1} \cdot r_{1y} \cdot \varphi_{1y} + u_{3\varphi_1} \cdot \varphi_{1yy} + u_{3\varphi_1\varphi_1} \cdot \varphi_{1y}^2.$$

Следовательно,

$$u_{xx} + u_{yy} = (r_{1x}^2 + r_{1y}^2)u_{3r_1r_1} + 2(r_{1x} \cdot \varphi_{1x} + r_{1y} \cdot \varphi_{1y})u_{3r_1\varphi_1} + (\varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2)u_{3\varphi_1\varphi_1} + \\ + (r_{1xx} + r_{1yy})u_{3r_1} + (\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy})u_{3\varphi_1};$$

$$r_{1x}^2 + r_{1y}^2 = (r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)^2 + (1 - r_1^2)^2 \sin^2 \varphi_1 = \\ = r_1^4 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1^2 + \cos^2 \varphi_1 + 4r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1 \cos \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 - 2r_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \\ + r_1^4 \sin^2 \varphi_1 = r_1^4 + 4r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 + 4r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1 \cos \varphi_1 + 1 = (1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2;$$

$$r_{1x} \cdot \varphi_{1x} + r_{1y} \cdot \varphi_{1y} = \\ = (r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1) \cdot \left(-\frac{(1 - r_1^2) \sin \varphi_1}{r} \right) + (1 - r_1^2) \sin \varphi_1 \cdot \frac{r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1}{r} = 0.$$

$$\varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2 = \frac{(1 - r_1^2)^2 \sin^2 \varphi_1}{r_1^2} + \frac{(r_1^2 \cos \varphi_1 + 2r_1 + \cos \varphi_1)^2}{r_1^2} = \\ = \frac{\sin^2 \varphi_1 - 2r_1^2 \sin^2 \varphi_1 + r_1^4 \sin^2 \varphi_1 + r_1^4 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1^2 + \cos^2 \varphi_1 + 4r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1 \cos \varphi_1}{r_1^2} = \\ = \frac{r_1^4 + 4r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 + 4r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1 \cos \varphi_1 + 1}{r_1^2} = \frac{(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2}{r_1^2};$$

$$r_{1xx} + r_{1yy} = \frac{(1 - r_1^2)(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + 3r_1^4 \cos^2 \varphi_1 + 8r_1^3 \cos \varphi_1 + 2r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 4r_1^2 - \cos^2 \varphi_1}{r_1} + \\ + \frac{(1 - r_1^2)(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + \cos^2 \varphi_1 + 2r_1^2 \cos^2 \varphi_1 - 3r_1^4 \cos^2 \varphi_1 - 1 - 2r_1^2 + 3r_1^4}{r_1} = \\ = \frac{2(1 - r_1^2)(1 + 2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + 3r_1^4 + 8r_1^3 \cos \varphi_1 + 4r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2r_1^2 - 1}{r_1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(1-r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)}{r_1} + \\
&+ \frac{3r_1^4 + 6r_1^3 \cos \varphi_1 + 3r_1^2 + 2r_1^3 \cos \varphi_1 + 4r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2r_1 \cos \varphi_1 - r_1^2 - 2r_1 \cos \varphi_1 - 1}{r_1} = \\
&= \frac{(2-2r_1^2)(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)}{r_1} + \\
&+ \frac{3r_1^2(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) + 2r_1 \cos \varphi_1(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2) - (1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)}{r_1} = \\
&= \frac{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)(2-2r_1^2 + 3r_1^2 + 2r_1 \cos \varphi_1 - 1)}{r_1} = \frac{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)(1+r_1^2 + 2r_1 \cos \varphi_1)}{r_1} \\
&= \frac{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2}{r_1}; \\
\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} &= \frac{2 \sin \varphi_1 (r_1^4 \cos \varphi_1 + r_1^3 + r_1 + \cos \varphi_1)}{r_1^2} - \frac{2 \sin \varphi_1 (r_1^4 \cos \varphi_1 + r_1^3 + r_1 + \cos \varphi_1)}{r_1^2} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= (1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2 u_{3r_1 r_1} + 0 \cdot u_{3r_1 \varphi_1} + \frac{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2}{r_1^2} u_{3\varphi_1 \varphi_1} + \\
&+ \frac{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2}{r_1} u_{3r_1} + 0 \cdot u_{3\varphi_1} = \frac{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2}{r_1^2} (r_1^2 u_{3r_1 r_1} + r_1 u_{3r_1} + u_{3\varphi_1 \varphi_1}),
\end{aligned}$$

и уравнение $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ запишется как

$$r_1^2 u_{3r_1 r_1} + r_1 u_{3r_1} + u_{3\varphi_1 \varphi_1} = \frac{r_1^2}{(1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2)^2} f\left(\frac{r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2}, \frac{r_1 \sin \varphi_1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2}\right).$$

Запишем контур σ_δ в новых переменных, учитывая определение (3.4) числа γ_δ

$$\sigma_\delta: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2; \quad x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 2y\delta + \delta^2 = \frac{1}{4} + \delta^2;$$

$$x^2 - x + y^2 + 2y\delta = 0; \quad x^2 + y^2 - x + 2y\delta = 0;$$

$$\frac{r_1^2}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} - \frac{r_1^2 + r_1 \cos \varphi_1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} + 2\delta \cdot \frac{r_1 \sin \varphi_1}{1+2r_1 \cos \varphi_1 + r_1^2} = 0;$$

$$2\delta \cdot r_1 \sin \varphi_1 = r_1 \cos \varphi_1; \quad 2\delta = \operatorname{ctg} \varphi_1; \quad \varphi_1 = \gamma_\delta.$$

Таким образом, условие $u|_{\sigma_\delta} = 0$ запишется в виде

$$u(x, y)|_{\sigma_\delta} = 0 \Rightarrow u_3(r_1, \varphi_1)|_{\sigma_\delta} = 0 \Rightarrow u_3|_{\varphi_1 = \gamma_\delta} = 0.$$

Для краевого условия $u(x, 0) = \tau(x)$ в переменных r_1, φ_1 будем иметь

$$u(x, 0) = \tau(x) \Rightarrow u\left(\frac{r_1}{1+r_1}, 0\right) = \tau\left(\frac{r_1}{1+r_1}\right);$$

$$u(x, y) = u_3(r_1, \varphi_1) = u_3\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x(1-x) - y^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, 0) = u_3\left(\frac{x}{1-x}, 0\right) \Rightarrow u\left(\frac{r_1}{1+r_1}, 0\right) = u_3\left(\frac{\frac{r_1}{1+r_1}}{1 - \frac{r_1}{1+r_1}}, 0\right) = u_3(r_1, 0).$$

В итоге, соотношение $u(x, 0) = \tau(x)$ перепишется в виде

$$u_3(r_1, 0) = \tau\left(\frac{r_1}{1+r_1}\right).$$

Наконец, для функции $\nu(x)$, определенной по формуле (3.12), получим

$$u_y(x, 0) = \nu(x) \Rightarrow u_y\left(\frac{r_1}{1+r_1}, 0\right) = \nu\left(\frac{r_1}{1+r_1}\right);$$

$$u_y = u_{3r_1} \cdot r_{1y} + u_{3\varphi_1} \cdot \varphi_{1y} = \frac{y(1-2x)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot u_{3r_1} + \frac{x(1-x) + y^2}{(x(1-x) - y^2)^2 + y^2} \cdot u_{3\varphi_1};$$

$$u_y(x, 0) = 0 + \frac{x(1-x)}{(x(1-x))^2} \cdot u_{3\varphi_1} = \frac{1}{x(1-x)} u_{3\varphi_1}\left(\frac{x}{1-x}, 0\right);$$

$$u_y\left(\frac{r_1}{1+r_1}, 0\right) = \frac{1}{\frac{r_1}{1+r_1}\left(1 - \frac{r_1}{1+r_1}\right)} u_{3\varphi_1}(r_1, 0) = \frac{(1+r_1)^2}{r_1} u_{3\varphi_1}(r_1, 0).$$

Таким образом, соотношение (3.12) примет вид

$$\frac{(1+r_1)^2}{r_1} u_{3\varphi_1}(r_1, 0) = v\left(\frac{r_1}{1+r_1}\right) \Rightarrow u_{3\varphi_1}(r_1, 0) = \frac{r_1 v\left(\frac{r_1}{1+r_1}\right)}{(1+r_1)^2};$$

В итоге, в результате замены (3.21) контур σ_δ преобразуется, с учетом обозначения (3.4), к виду

$$\varphi = \gamma_\delta,$$

а сама задача запишется как

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = f_1(r, \varphi), \quad (3.22)$$

$$u|_{\varphi=\gamma_\delta} = 0, \quad (3.23)$$

$$u(r, 0) = \tau\left(\frac{r}{1+r}\right), \quad (3.24)$$

где

$$f_1(r, \varphi) = \frac{r^2}{(1+2r\cos\varphi+r^2)^2} f\left(\frac{r^2+r\cos\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}, \frac{r\sin\varphi}{1+2r\cos\varphi+r^2}\right).$$

При этом определение (3.12) функции $v(x)$ запишется в виде

$$u_\varphi(r, 0) = \frac{r v\left(\frac{r}{1+r}\right)}{(1+r)^2}. \quad (3.25)$$

К задаче (3.22)-(3.24) применим преобразование Меллина. Используя формулы [80, с. 541]

$$\int_0^\infty r^{s-1} r^2 u_{rr} dr = (s+1)s \int_0^\infty r^{s-1} u dr,$$

$$\int_0^\infty r^{s-1} r u_r dr = -s \int_0^\infty r^{s-1} u dr,$$

и обозначив

$$\bar{f}(s, \varphi) = \int_0^{\infty} r^{s-1} f_1(r, \varphi) dr, \quad (3.26)$$

$$\bar{u}(s, \varphi) = \int_0^{\infty} r^{s-1} u(r, \varphi) dr, \quad (3.27)$$

а также учитывая введенные ранее определения (3.17) и (3.18) функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{v}(s)$, получим последовательно.

$$\int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot r_1^2 u_{3r_1} dr_1 + \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot r_1 u_{3r_1} dr_1 + \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot u_{3\varphi_1} dr_1 = \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot f_2(r_1, \varphi_1) dr_1;$$

$$(s+1)s \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot u_3 dr_1 - s \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot u_3 dr_1 + \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot u_{3\varphi_1} dr_1 = \bar{f}(s, \varphi_1);$$

$$(s+1)s\bar{u}(s, \varphi_1) - s\bar{u}(s, \varphi_1) + \bar{u}_{\varphi_1}(s, \varphi_1) = \bar{f}(s, \varphi_1);$$

$$\bar{u}_{\varphi_1}(s, \varphi_1) + s^2 \bar{u}(s, \varphi_1) = \bar{f}(s, \varphi_1);$$

$$\int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot u_3(r_1, \varphi_1) \Big|_{\varphi_1=\gamma_\delta} dr_1 = 0 \Rightarrow \bar{u}(s, \varphi_1) \Big|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0;$$

$$\int_0^{\infty} r_1^{s-1} u_3(r_1, 0) dr_1 = \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \tau \left(\frac{r_1}{1+r_1} \right) dr_1 \Rightarrow \bar{u}(s, \varphi_1) \Big|_{\varphi_1=0} = \bar{\tau}(s)$$

$$\int_0^{\infty} r_1^{s-1} u_{3\varphi_1}(r_1, 0) dr_1 = \int_0^{\infty} r_1^{s-1} \cdot \frac{r_1 \nu \left(\frac{r_1}{1+r_1} \right)}{(1+r_1)^2} dr_1 \Rightarrow \bar{u}_{\varphi_1}(s, \varphi_1) \Big|_{\varphi_1=0} = \bar{v}(s).$$

Таким образом, из задачи (3.22)-(3.24) получим следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $[0, \gamma_\delta]$:

$$\bar{u}_{\varphi\varphi} + s^2 \bar{u} = \bar{f}(s, \varphi), \quad (3.28)$$

$$\bar{u} \Big|_{\varphi=0} = \bar{\tau}(s), \quad (3.29)$$

$$\bar{u} \Big|_{\varphi=\gamma_\delta} = 0, \quad (3.30)$$

а условие (3.25) запишется в виде

$$\bar{u}_\varphi(s, 0) = \bar{v}(s). \quad (3.31)$$

Здесь функции $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{v}(s)$ определяются по формулам (3.17) и (3.18).

Решаем однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.28)

$$\bar{u}_{\varphi_1 \varphi_1} + s^2 \bar{u} = 0,$$

с условиями (3.29) и (3.30).

Общее решение записывается в виде

$$\bar{u}_0(s, \varphi_1) = C_1 \operatorname{coss} \varphi_1 + C_2 \sin s \varphi_1.$$

Из условия (3.29) получим

$$C_1 = \bar{\tau}(s),$$

так что искомое решение запишется в виде

$$\bar{u}_0(s, \varphi_1) = \bar{\tau}(s) \operatorname{coss} \varphi_1 + C_2 \sin s \varphi_1.$$

Подставив последнее соотношение в условие (3.30), получим

$$\bar{\tau}(s) \operatorname{coss} \gamma_\delta + C_2 \sin s \gamma_\delta = 0 \Rightarrow C_2 = -\bar{\tau}(s) \cdot \frac{\operatorname{coss} \gamma_\delta}{\sin s \gamma_\delta} = -\bar{\tau}(s) \cdot \operatorname{ctg} s \gamma_\delta.$$

Таким образом, подставив полученные значения C_1 и C_2 , получим, что решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.28), удовлетворяющее краевым условиям (3.29) и (3.30), запишется в виде

$$\bar{u}_0(s, \varphi_1) = \bar{\tau}(s) \operatorname{coss} \varphi_1 - \bar{\tau}(s) \cdot \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1.$$

Перейдем к решению неоднородного уравнения (3.28), которое будем искать в виде

$$\bar{u}(s, \varphi_1) = \bar{u}_0(s, \varphi_1) + \bar{u}_g(s, \varphi_1).$$

Учитывая постановку задачи (3.28)-(3.30) и свойства функции $\bar{u}_0(s, \varphi_1)$, удовлетворяющее однородному уравнению и неоднородным краевым условиям (3.29)-(3.30), получим следующую задачу для определения функции $\bar{u}_g(s, \varphi_1)$

$$\bar{u}_{g\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_g = \bar{f}(s, \varphi_1),$$

$$\bar{u}_g \Big|_{\varphi_1=0} = \bar{u}_g \Big|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $\bar{u}_0(s, \varphi_1) = C_1 \operatorname{coss} \varphi_1 + C_2 \sin s \varphi_1$. Найдем из него два линейно независимых частных решения $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$, удовлетворяющих соответственно условиям

$$\bar{u}_1 \Big|_{\varphi_1=0} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{u}_2 \Big|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0.$$

Имеем

$$\bar{u}_1(s, \varphi_1) = C_1 \operatorname{coss} \varphi_1 + C_2 \sin s \varphi_1;$$

$$\bar{u}_1 \Big|_{\varphi_1=0} = 0 \Rightarrow C_1 + 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0;$$

$$C_2 = \operatorname{const}; \text{ можем положить } C_2 = 1, \text{ откуда } \bar{u}_1(s, \varphi_1) = \sin s \varphi_1.$$

Далее

$$\bar{u}_2(s, \varphi_1) = C_3 \operatorname{coss} \varphi_1 + C_4 \sin s \varphi_1;$$

$$\bar{u}_2 \Big|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0 \Rightarrow C_3 \operatorname{coss} \gamma_\delta + C_4 \sin s \gamma_\delta = 0; \quad \text{положим } C_3 = 1,$$

тогда

$$C_4 = -\frac{\operatorname{coss} \gamma_\delta}{\sin s \gamma_\delta} = -\operatorname{ctg} s \gamma_\delta, \text{ откуда } \bar{u}_2(s, \varphi_1) = \operatorname{coss} \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1.$$

Таким образом, два линейно независимых частных решения, удовлетворяющих первому и второму условиям $\bar{u}_g \Big|_{\varphi_1=0} = \bar{u}_g \Big|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0$ соответственно, имеют вид

$$\bar{u}_1(s, \varphi_1) = \sin s \varphi_1,$$

$$\bar{u}_2(s, \varphi_1) = \operatorname{coss} \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1.$$

Используя два этих частных решения, можем записать общее решение однородной задачи

$$\bar{u}_{g\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_g = \bar{f}(s, \varphi_1),$$

$$\bar{u}_g \Big|_{\varphi_1=0} = \bar{u}_g \Big|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0.$$

в виде

$$\bar{u}_g(s, \varphi_1) = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2.$$

Решая соответствующую неоднородную задачу методом вариации произвольных постоянных полученного решения, имеем:

$$\bar{u}_g(s, \varphi_1) = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2 \Rightarrow \bar{u}_{g\varphi_1}(s, \varphi_1) = C_{1\varphi_1} \bar{u}_1 + C_1 \bar{u}_{1\varphi_1} + C_{2\varphi_1} \bar{u}_2 + C_2 \bar{u}_{2\varphi_1}.$$

Наложим на C_1 и C_2 , которые мы полагаем функциями от переменных s , φ_1 , следующее условие

$$C_{1\varphi_1} \bar{u}_1 + C_{2\varphi_1} \bar{u}_2 = 0,$$

тогда

$$\bar{u}_{g\varphi_1} = C_1 \bar{u}_{1\varphi_1} + C_2 \bar{u}_{2\varphi_1};$$

$$\bar{u}_{g\varphi_1\varphi_1}(s, \varphi_1) = C_{1\varphi_1} \bar{u}_{1\varphi_1} + C_1 \bar{u}_{1\varphi_1\varphi_1} + C_{2\varphi_1} \bar{u}_{2\varphi_1} + C_2 \bar{u}_{2\varphi_1\varphi_1}.$$

Подставив полученное выражение в уравнение $\bar{u}_{g\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_g = \bar{f}(s, \varphi_1)$, получим

$$\bar{u}_{g\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_g = \bar{f}(s, \varphi_1);$$

$$C_{1\varphi_1} \bar{u}_{1\varphi_1} + C_1 \bar{u}_{1\varphi_1\varphi_1} + C_{2\varphi_1} \bar{u}_{2\varphi_1} + C_2 \bar{u}_{2\varphi_1\varphi_1} + s^2 (C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2) = \bar{f}(s, \varphi_1);$$

$$C_{1\varphi_1} \bar{u}_{1\varphi_1} + C_{2\varphi_1} \bar{u}_{2\varphi_1} + C_1 (\bar{u}_{1\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_1) + C_2 (\bar{u}_{2\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_2) = \bar{f}(s, \varphi_1).$$

Так как $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ являются решениями соответствующего однородного уравнения $\bar{u}_{\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u} = 0$, то

$$\bar{u}_{1\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_{2\varphi_1\varphi_1} + s^2 \bar{u}_2 = 0,$$

поэтому

$$C_{1\varphi_1} \bar{u}_{1\varphi_1} + C_{2\varphi_1} \bar{u}_{2\varphi_1} = \bar{f}(s, \varphi_1).$$

Отсюда, а также из соотношения $C_{1\varphi_1} \bar{u}_1 + C_{2\varphi_1} \bar{u}_2 = 0$, получим следующую систему для определения C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_{1\varphi_1} \bar{u}_1 + C_{2\varphi_1} \bar{u}_2 = 0, \\ C_{1\varphi_1} \bar{u}_{1\varphi_1} + C_{2\varphi_1} \bar{u}_{2\varphi_1} = \bar{f}(s, \varphi_1). \end{cases}$$

Решим эту систему с учетом определений функций $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$.

$$\bar{u}_1 = \sin s \varphi_1 \Rightarrow \bar{u}_{1\varphi_1} = s \cdot \cos s \varphi_1;$$

$$\bar{u}_2 = \cos s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{2\varphi_1} = s \cdot (-\sin s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \cos s \varphi_1) = -s \cdot (\sin s \varphi_1 + \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \cos s \varphi_1);$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 \\ \bar{u}_{1\varphi_1} & \bar{u}_{2\varphi_1} \end{vmatrix} = \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_{2\varphi_1} - \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_{1\varphi_1} =$$

$$= \sin s \varphi_1 \cdot (-s) (\sin s \varphi_1 + \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \cos s \varphi_1) - s \cdot \cos s \varphi_1 (\cos s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1) =$$

$$= -s (\sin^2 s \varphi_1 + \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \sin s \varphi_1 \cos s \varphi_1 + \cos^2 s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \sin s \varphi_1 \cos s \varphi_1) = -s;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \bar{u}_2 \\ \bar{f}(s, \varphi_1) & \bar{u}_{2\varphi_1} \end{vmatrix} = -\bar{u}_2 \cdot \bar{f}(s, \varphi_1);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & 0 \\ \bar{u}_{1\varphi_1} & \bar{f}(s, \varphi_1) \end{vmatrix} = \bar{u}_1 \cdot \bar{f}(s, \varphi_1);$$

$$C_{1\varphi_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\bar{u}_2 \cdot \bar{f}(s, \varphi_1)}{-s} = \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{f}(s, \varphi_1)}{s};$$

$$C_{2\varphi_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{f}(s, \varphi_1)}{-s} = -\frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{f}(s, \varphi_1)}{s}.$$

Отсюда получим

$$C_1(s, \varphi_1) = \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \frac{\bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t)}{s} dt = \frac{1}{s} \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt;$$

$$C_2(s, \varphi_1) = - \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_1} \frac{\bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t)}{s} dt = -\frac{1}{s} \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_1} \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt.$$

Подставляя решение $\bar{u}_g(s, \varphi_1) = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2$ с найденными значениями C_1 и C_2 в условия $\bar{u}_g|_{\varphi_1=0} = \bar{u}_g|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0$ и учитывая соотношения $\bar{u}_1|_{\varphi_1=0} = 0$ и $\bar{u}_2|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0$, получим значения постоянных φ_{10} и φ_{11} .

$$\bar{u}_g(s, \varphi_1) = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2 = \frac{1}{s} \left(\bar{u}_1(s, \varphi_1) \int_{\varphi_{10}}^{\varphi_1} \bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt - \bar{u}_2(s, \varphi_1) \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_1} \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt \right);$$

$$\bar{u}_g|_{\varphi_1=0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{s} \left(\bar{u}_1(s, 0) \int_{\varphi_{10}}^0 \bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt - \bar{u}_2(s, 0) \int_{\varphi_{11}}^0 \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \text{м.к. } \bar{u}_1|_{\varphi_1=0} = 0 \right| \Rightarrow -\frac{1}{s} \bar{u}_2(s, 0) \int_{\varphi_{11}}^0 \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt = 0 \Rightarrow \varphi_{11} = 0;$$

$$\bar{u}_g|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{s} \left(\bar{u}_1(s, \gamma_\delta) \int_{\varphi_{10}}^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt - \bar{u}_2(s, \gamma_\delta) \int_{\varphi_{11}}^{\gamma_\delta} \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \text{м.к. } \bar{u}_2|_{\varphi_1=\gamma_\delta} = 0 \right| \Rightarrow \frac{1}{s} \bar{u}_1(s, \gamma_\delta) \int_{\varphi_{11}}^{\gamma_\delta} \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt = 0 \Rightarrow \varphi_{10} = \gamma_\delta.$$

Таким образом,

$$\bar{u}_g(s, \varphi_1) = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2 = \frac{1}{s} \left(\bar{u}_1(s, \varphi_1) \int_{\gamma_\delta}^{\varphi_1} \bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt - \bar{u}_2(s, \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt \right)$$

или

$$\bar{u}_g(s, \varphi_1) = -\frac{1}{s} \left(\bar{u}_1(s, \varphi_1) \int_{\varphi_1}^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt + \bar{u}_2(s, \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt \right).$$

Учитывая, что решение задачи (3.28)-(3.30) искалось в виде $\bar{u}(s, \varphi_1) = \bar{u}_0(s, \varphi_1) + \bar{u}_g(s, \varphi_1)$, получим окончательно следующее выражение решения задачи (3.28)-(3.30).

$$\bar{u}(s, \varphi_1) = \bar{u}_0(s, \varphi_1) + \bar{u}_g(s, \varphi_1) = \bar{\tau}(s) \operatorname{coss} \varphi_1 - \bar{\tau}(s) \cdot \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1 -$$

$$-\frac{1}{s} \left(\sin s \varphi_1 \int_{\varphi_1}^{\gamma_\delta} (\cos st - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin st) \bar{f}(s, t) dt + (\operatorname{coss} \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \sin st \cdot \bar{f}(s, t) dt \right)$$

ИЛИ

$$\bar{u}(s, \varphi_1) = \bar{\tau}(s) \bar{u}_2(s, \varphi_1) - \frac{1}{s} \left(\bar{u}_1(s, \varphi_1) \int_{\varphi_1}^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt + \bar{u}_2(s, \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \bar{u}_1(s, t) \cdot \bar{f}(s, t) dt \right).$$

Таким образом, решение задачи (3.28)-(3.30) имеет вид [64]

$$\bar{u}(s, \varphi) = \bar{\tau}(s) \cdot \bar{u}_2(s, \varphi) - \frac{1}{s} \bar{u}_1(s, \varphi) \int_{\varphi}^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt - \frac{1}{s} \bar{u}_2(s, \varphi) \int_0^{\varphi} \bar{u}_1(s, t) \bar{f}(s, t) dt, \quad (3.32)$$

где

$$\bar{u}_1(s, \varphi) = \sin s \varphi, \quad (3.33)$$

$$\bar{u}_2(s, \varphi) = \cos s \varphi - \sin s \varphi \cdot \frac{\cos s \gamma_\delta}{\sin s \gamma_\delta}. \quad (3.34)$$

Из определения (3.31) функции $\bar{\nu}(s)$ получим с учетом соотношения (3.32)

$$\bar{\nu}(s) = \bar{u}_{\varphi_1}(s, 0);$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\varphi_1}(s, \varphi_1) &= \bar{\tau}(s) (-s \cdot \sin s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot s \cdot \cos s \varphi_1) - \frac{1}{s} \cdot s \cdot \cos s \varphi_1 \int_{\varphi_1}^{\gamma_\delta} (\cos st - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin st) \bar{f}(s, t) dt - \\ &- \frac{1}{s} \sin s \varphi_1 \left(-(\cos s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1) \bar{f}(s, \varphi_1) \right) - \frac{1}{s} (-s \cdot \sin s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot s \cdot \cos s \varphi_1) \int_0^{\varphi_1} \sin st \cdot \bar{f}(s, t) dt - \\ &- \frac{1}{s} (\cos s \varphi_1 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin s \varphi_1) \cdot \sin s \varphi_1 \cdot \bar{f}(s, \varphi_1); \\ \bar{u}_{\varphi_1}(s, 0) &= \bar{\tau}(s) (-s \cdot 0 - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot s \cdot 1) - \int_0^{\gamma_\delta} (\cos st - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin st) \bar{f}(s, t) dt - 0 - 0 - 0 = \\ &= -s \cdot \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \bar{\tau}(s) - \int_0^{\gamma_\delta} (\cos st - \operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot \sin st) \bar{f}(s, t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{\nu}(s) = -\operatorname{ctg} s \gamma_\delta \cdot s \cdot \bar{\tau}(s) - \int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt. \quad (3.35)$$

Последнее равенство и есть основное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученное в эллиптической части области.

3.4 Определение свойств решений

Теперь из двух равенств (3.20) и (3.35) найдем значения функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$

$$\bar{\nu}(s) = \frac{-ctg s\gamma_\delta \cdot s \cdot \bar{F}_1(s) - \int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt}{1 - ctg s\gamma_\delta}, \quad (3.36)$$

$$\bar{\tau}(s) = \frac{s \bar{F}_1(s) + \int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt}{s(1 - ctg s\gamma_\delta)}. \quad (3.37)$$

Проанализируем, прежде всего, определения (3.17) и (3.18) функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$ и их связь с исходными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

$$\bar{\tau}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \tau\left(\frac{x}{1+x}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{1+x} = t; \quad x = \frac{t}{1-t}; \quad x=0 \quad t=0; \\ dx = \frac{dt}{(1-t)^2}; \quad x=\infty \quad t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{s-1} \frac{\tau(t) dt}{(1-t)^2} = \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{-s-1} \tau(t) dt;$$

$$\bar{\nu}(s) = \int_0^\infty x^s \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 t^s (1-t)^{-s} \nu(t) dt.$$

Отсюда видно, что если, к примеру, функция $\bar{\tau}(s)$ непрерывна на промежутке $(-1, 0)$, то функция $\tau(t)$ непрерывна в точке $t=0$, а также должна в ней обращаться в нуль порядка не ниже первого.

Таким образом, учитывая определения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, для n -регулярности решения правые части соотношений (3.36) и (3.37) должны быть непрерывны при $-n < s < 0$, откуда, в силу (3.36) и (3.37),

$$n\gamma_\delta < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \gamma_\delta < \frac{3\pi}{4n}.$$

В итоге, необходимым и достаточным условием n -регулярности решения задачи Трикоми для любой правой части $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ является условие (9). Первая часть теоремы 3.3 доказана.

Перейдем теперь к установлению свойств решений при любых углах подхода γ_δ . Предположим, что условие (3.9) не выполнено. Это означает, что при

$$s = -\alpha_k = -\frac{\frac{3\pi}{4} + \pi k}{\gamma_\delta} \in (-n, 0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad j_0 = \left[\frac{n\gamma_\delta}{\pi} - \frac{3}{4} \right],$$

знаменатель в (3.36) или (3.37) обращается в нуль. Поэтому для n -регулярности решения мы должны потребовать, чтобы и числитель в этих точках был равен нулю

$$\left(s\bar{F}_1(s) + \int_0^{\gamma_{\delta}} \bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t) dt \right) \Big|_{s=-\alpha_k} = 0, \quad (3.38)$$

где α_k определяются из соотношения (3.7) (а условие (3.38) представляет собой n условий), то есть наложить некоторые условия на правую часть уравнения (3.1) $f(x,y)$. Согласно свойству преобразования Меллина [80, с. 567]

$$g(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx \Rightarrow sg(s) = - \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot x f'(x) dx,$$

имеем с учетом соотношения (3.19)

$$\begin{aligned} s\bar{F}_1(s) &= - \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot x F_1'(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^s dx \left(\int_0^{\frac{x}{1+x}} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\frac{x}{1+x}} f\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1 \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^s dx}{(1+x)^2} \int_{0_1}^{\frac{x}{1+x}} f\left(\frac{\xi_1 + \frac{x}{1+x}}{2}, \frac{\xi_1 - \frac{x}{1+x}}{2}\right) d\xi_1. \end{aligned}$$

Проведя замену

$$\frac{x}{1+x} = t \Rightarrow x = \frac{t}{1-t}; \quad dx = \frac{dt}{(1-t)^2}; \quad 1+x = \frac{1}{1-t}; \quad \begin{matrix} t=0 \Leftrightarrow x=0, \\ t=1 \Leftrightarrow x=\infty, \end{matrix}$$

получим

$$s\bar{F}_1(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} \right)^s \cdot (1-t)^2 \frac{dt}{(1-t)^2} \int_0^t f\left(\frac{\xi_1 + t}{2}, \frac{\xi_1 - t}{2}\right) d\xi_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{t}{1-t} \right)^s f\left(\frac{\xi_1 + t}{2}, \frac{\xi_1 - t}{2}\right) d\xi_1 dt.$$

В последнем двойном интеграле сделаем замену переменных

$$t = x - y, \quad \xi_1 = x + y \Leftrightarrow \frac{\xi_1 + t}{2} = x, \quad \frac{\xi_1 - t}{2} = y,$$

и используя формулу [81, с. 206]

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv, \quad (3.39)$$

получим (с учетом области)

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2,$$

$$s \bar{F}_1(s) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^t \left(\frac{t}{1-t} \right)^s f\left(\frac{\xi_1 + t}{2}, \frac{\xi_1 - t}{2} \right) d\xi_1 dt = \iint_{\Omega^-} \left(\frac{x-y}{1-x-y} \right)^s f(x, y) dx dy.$$

В итоге, соотношение (3.38), с учетом (3.34), перепишется в виде

$$\left(\iint_{\Omega^-} \left(\frac{x-y}{1-x-y} \right)^s f(x, y) dx dy + \int_0^{\gamma_\delta} (\cos st - \sin st \cdot \operatorname{ctg} s \gamma_\delta) \bar{f}(s, t) dt \right) \Big|_{s=-\alpha_k} = 0. \quad (3.40)$$

При $s = -\alpha_k$, сделав обратную замену переменных по формулам (3.22) и перейдя к переменным x, y , из соотношения (3.40) с учетом формул (3.6), (3.5*), (3.26), (3.34), (3.39) получим последовательно.

$$x = \frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, \quad y = \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2};$$

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{1 + 2r \cos \varphi + r^2};$$

$$\frac{x + iy}{x^2 + y^2} - 1 = \frac{r^2 + r \cos \varphi + i r \sin \varphi}{r^2} - 1 = \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{r};$$

$$\left(\frac{x + iy}{x^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} = \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{r} \right)^{\alpha_k} = \frac{\cos \alpha_k \varphi + i \sin \alpha_k \varphi}{r^{\alpha_k}};$$

$$v_k(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{x + iy}{x^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} + \operatorname{Im} \left(\frac{x + iy}{x^2 + y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} = \frac{\cos \alpha_k \varphi + \sin \alpha_k \varphi}{r^{\alpha_k}} \quad (y > 0);$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(s, \varphi) \Big|_{s=-\alpha_k} &= (\cos s \varphi - \sin s \varphi \cdot \operatorname{ctg} s \gamma_\delta) \Big|_{s=-\alpha_k} = \cos(-\alpha_k \varphi) - \sin(-\alpha_k \varphi) \cdot \operatorname{ctg}(-\alpha_k \gamma_\delta) = \\ &= \cos \alpha_k \varphi - \sin \alpha_k \varphi \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{4} + \pi k \right) = \cos \alpha_k \varphi + \sin \alpha_k \varphi; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\gamma_\delta^-} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt \Big|_{s=-\alpha_k} = \int_0^{\gamma_\delta^-} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha_k \varphi + \sin \alpha_k \varphi}{r^{\alpha_k}} \cdot \frac{r}{(1 + 2r \cos \varphi + r^2)^2} f\left(\frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}\right) dr d\varphi;$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x(1-x) + y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y(1-2x)}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y(1-2x)}{(x(1-x) - y^2)^2 + y^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x(1-x) + y^2}{(x(1-x) - y^2)^2 + y^2};$$

$$|J| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{array} \right| = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$f\left(\frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}\right) = f(x, y);$$

$$\frac{r}{(1 + 2r \cos \varphi + r^2)^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((1-x)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

В итоге

$$\int_0^{\gamma_\delta^-} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt \Big|_{s=-\alpha_k} = \iint_{\Omega^-} v_k(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Таким образом, условие (3.40), а значит и условие (3.38), запишется, в силу (3.5*), в виде

$$\begin{aligned} \left(s \bar{F}_1(s) + \int_0^{\gamma_\delta^-} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt \right) \Big|_{s=-\alpha_k} &= \\ &= \iint_{\Omega^-} \left(\frac{1 - (x - y)}{x - y} \right)^{\alpha_k} f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega^+} v_k(x, y) f(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega^-} v_k(x, y) f(x, y) dx dy + \iint_{\Omega^+} v_k(x, y) f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} v_k(x, y) f(x, y) dx dy = 0, \end{aligned}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Теорема 3.3 доказана.

4 Свойства решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта

4.1 Постановка задачи

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y < 0$ - характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0 \text{ и } BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1 \text{ уравнения Геллерстедта}$$

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (4.1)$$

а при $y > 0$ - кривой

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y): \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} + \delta \right)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad -\infty < \delta < +\infty \right\},$$

рассматривается задача Трикоми: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0, \quad (4.2)$$

так, чтобы были выполнены следующие условия «склеивания» решения на линии изменения типа уравнения $\{y=0\}$:

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0), \quad 0 < x < 1. \quad (4.3)$$

По числу δ определим следующее число

$$\gamma_\delta = \operatorname{arctg} 2\delta, \quad 0 < \gamma_\delta < \pi. \quad (4.4)$$

Будем говорить, что функция $h(x, y)$ принадлежит классу $C_{A,B}^{\alpha,\beta}(\overline{\Omega})$ тогда и только тогда, когда функция $x^\alpha |1-x|^\beta h(x, y) \in C(\overline{\Omega})$.

Назовем n -регулярным решением задачи Трикоми решение принадлежащее классу

$$u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap C_{A,B}^{-n,0}(\overline{\Omega}) \quad (v(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap C_{A,B}^{0,-n}(\overline{\Omega})).$$

При $m=0$ задача (4.1)-(4.3) сводится к задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе (задаче Т)

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} = f(x, y),$$

$$u|_{\sigma \cup AC} = 0,$$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad u_y(x, +0) = u_y(x, -0), \quad 0 < x < 1.$$

Кроме того, наряду с задачей Т, рассматривается следующая задача Т*

$$\operatorname{sgn} y \, v_{xx} + v_{yy} = g(x, y),$$

$$v|_{\sigma_\delta \cup BC} = 0,$$

$$v(x, +0) = v(x, -0), \quad v_y(x, +0) = v_y(x, -0), \quad 0 < x < 1.$$

Для однородных задач Т и Т* (при $f \equiv 0$ и $g \equiv 0$ соответственно) были получены следующие результаты – см. [15], а также раздел 3.

Теорема 4.1 *Существует бесконечное множество решений $u_k(x, y) \in C_{A,B}^{-\alpha_k, \alpha_k}(\overline{\Omega})$ однородной ($f \equiv 0$) задачи Т. Данные решения определяются равенствами*

$$u_k(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} + \operatorname{Im} \left(\frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{1-x-y} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y < 0, \end{cases}$$

где $\alpha_k = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k = 0, 1, \dots$. Кроме того, $u_k(x, y) \notin L_2(\Omega)$ при $k \geq 1$, а $u_0(x, y) \in L_2(\Omega)$

только при выполнении условия $\gamma_\delta > \frac{3\pi}{4}$.

Теорема 4.2 *Существует бесконечное множество решений $v_k(x, y) \in C_{A,B}^{\alpha_k, -\alpha_k}(\overline{\Omega})$ однородной ($g \equiv 0$) задачи Т*. Данные решения задаются формулами*

$$v_k(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k} + \operatorname{Im} \left(\frac{x+iy}{x^2+y^2} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y > 0, \\ \left(\frac{1}{x-y} - 1 \right)^{\alpha_k}, & y < 0, \end{cases}$$

где $\alpha_k = \frac{3\pi}{4} + \pi k$. Кроме того $v_k(x, y) \notin L_2(\Omega)$ при $k \geq 1$, а $v_0(x, y) \in L_2(\Omega)$ только при

выполнении условия $\gamma_\delta > \frac{3\pi}{4}$.

Для неоднородных задач Т и Т* имеют место следующие теоремы – см. [16], а также раздел 3.

Теорема 4.3 Необходимым и достаточным условием n -регулярности решения задачи T для любой правой части $f(x, y) \in C(\overline{\Omega})$ является условие:

$\gamma_\delta < \frac{3\pi}{4n}$, $n = 1, 2, \dots$. Для n -регулярности решения при любых углах подхода γ_δ правая часть уравнения должна удовлетворять условиям $\iint_{\Omega} v_k(x, y) f(x, y) dx dy = 0$, $k = 0, \dots, j_0$, где функции v_k определяются из теоремы 2, $j_0 = \left[\frac{n\gamma_\delta}{\pi} - \frac{3}{4} \right]$, а $[z]$ - целая часть числа z .

Теорема 4.4 Необходимым и достаточным условием n -регулярности решения задачи T^* для любой правой части $g(x, y) \in C(\Omega)$ является условие

$\gamma_\delta < \frac{3\pi}{4n}$, $n = 1, 2, \dots$. Для n -регулярности решения при любых углах подхода γ_δ правая часть уравнения (I) должна удовлетворять условиям $\iint_{\Omega} u_k(x, y) g(x, y) dx dy = 0$, $k = 0, \dots, j_0$, где функции u_k определяются из теоремы 1, $j_0 = \left[\frac{n\gamma_\delta}{\pi} - \frac{3}{4} \right]$, а $[z]$ - целая часть числа z .

Вернемся, наконец, к задаче Трикоми для уравнения Геллерстедта (задаче (4.1)-(4.3)).

Введем следующие обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (4.5)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x). \quad (4.6)$$

Сделаем следующую замену переменных

$$y_1 = \begin{cases} \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}}, & y > 0, \\ -\frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}}, & y \leq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

В этом случае задача (4.1)-(4.3) преобразуется к виду

$$\operatorname{sgn} y_1 u_{xx} + u_{y_1 y_1} + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{u_{y_1}}{y_1} = f_1(x, y_1), \quad (4.8)$$

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0, \quad (4.9)$$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad \lim_{y_1 \rightarrow +0} y_1^{\frac{m}{m+2}} u_{y_1}(x, y_1) = \lim_{y_1 \rightarrow -0} (-y_1)^{\frac{m}{m+2}} u_{y_1}(x, y_1), \quad 0 < x < 1, \quad (4.10)$$

где

$$f_1(x, y_1) = \begin{cases} \left(\frac{m+2}{2} y_1\right)^{-\frac{2m}{m+2}} f\left(x, \left(\frac{m+2}{2} y_1\right)^{\frac{2}{m+2}}\right), & y_1 > 0, \\ \left(-\frac{m+2}{2} y_1\right)^{-\frac{2m}{m+2}} f\left(x, \left(-\frac{m+2}{2} y_1\right)^{\frac{2}{m+2}}\right), & y_1 < 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Уравнения характеристик при этом запишутся как $AC: x + y_1 = 0$, $BC: x - y_1 = 1$, а кривая σ_δ - в виде

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y_1 + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad -\infty < \delta < +\infty \right\}.$$

Наконец, определения (4.5) и (4.6) функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ примут вид

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad (4.12)$$

$$\nu(x) = \lim_{y_1 \rightarrow 0} \left(\frac{m+2}{2} y_1\right)^{\frac{m}{m+2}} u_{y_1}(x, y_1). \quad (4.13)$$

4.2 Исследование задачи в гиперболической части области

В гиперболической части области Ω_1^- ($y_1 < 0$) рассмотрим задачу Коши-Гурса (Дарбу)

$$-u_{xx} + u_{y_1 y_1} + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{u_{y_1}}{y_1} = f_1(x, y_1), \quad (4.14)$$

$$u|_{AC} = 0, \quad (4.15)$$

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \left(\frac{m+2}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}} (-y_1)^{\frac{m}{m+2}} u_{y_1}(x, y_1) = \nu(x). \quad (4.16)$$

Решение этой задачи полностью исследовано [69, с. 118 – 121]. В характеристических переменных

$$\begin{cases} \xi = x + y_1, \\ \eta = x - y_1 \end{cases}$$

оно записывается в виде

$$u(\xi, \eta) = \gamma \int_0^\xi \frac{\nu(t) dt}{(\xi - t)^{\frac{m}{2(m+2)}} (\eta - t)^{\frac{m}{2(m+2)}}} + \int_0^\xi d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) \cdot H(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta) d\eta_1, \quad (4.17)$$

где

$$\gamma = \frac{k}{2} \cdot \left(\frac{4}{m+2} \right)^{\frac{m}{m+2}}, \quad (4.18)$$

$$k = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2(m+2)}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)}, \quad (4.19)$$

$$H(\xi_1, \eta_1, \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{(\eta_1 - \xi_1)^{\frac{m}{m+2}}}{(\eta - \xi_1)^{\frac{m}{2(m+2)}} \cdot (\eta_1 - \xi)^{\frac{m}{2(m+2)}}} F\left(\frac{m}{2(m+2)}, \frac{m}{2(m+2)}; 1; \frac{(\xi_1 - \xi)(\eta_1 - \eta)}{(\xi_1 - \eta)(\eta_1 - \xi)}\right), & \eta_1 > \xi, \\ \frac{k \cdot (\eta_1 - \xi_1)^{\frac{m}{m+2}}}{(\eta - \xi_1)^{\frac{m}{2(m+2)}} \cdot (\eta_1 - \xi)^{\frac{m}{2(m+2)}}} F\left(\frac{m}{2(m+2)}, \frac{m}{2(m+2)}; \frac{m}{m+2}; \frac{(\eta_1 - \xi_1)(\eta - \xi)}{(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1)}\right), & \eta_1 \leq \xi. \end{cases} \quad (4.20)$$

Полагая $y_1 = 0$, откуда $\xi = \eta = x$, получим из соотношения (4.17) следующее выражение для функции $\tau(x) \equiv u(x, 0)$:

$$\tau(x) = \gamma \int_0^x \frac{\nu(t) dt}{(x-t)^{\frac{m}{m+2}}} + F_1(x), \quad (4.21)$$

где

$$F_1(x) = k \int_0^x \frac{d\xi_1}{(x - \xi_1)^{\frac{m}{2(m+2)}}} \int_{\xi_1}^x \frac{(\eta_1 - \xi_1)^{\frac{m}{m+2}}}{(x - \eta_1)^{\frac{m}{2(m+2)}}} f_1\left(\frac{\xi_1 + \eta_1}{2}, \frac{\xi_1 - \eta_1}{2}\right) d\eta_1. \quad (4.22)$$

Вводя новые переменные

$$x = \frac{x_1}{1+x_1}, \quad t = \frac{t_1}{1+t_1},$$

соотношение (4.21) записано в виде

$$\frac{\tau\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^{\frac{m}{m+2}}} = \gamma \int_0^{x_1} \frac{\nu\left(\frac{t_1}{1+t_1}\right) dt_1}{(1+t_1)^{\frac{m+4}{m+2}} (x_1 - t_1)^{\frac{m}{m+2}}} + \frac{F_1\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^{\frac{m}{m+2}}}. \quad (4.23)$$

Заметим, что при $0 < x < 1$ имеем $0 < x_1 < +\infty$.

Проведя еще одну замену $t_1 = x_1 \theta$, откуда $\theta = \frac{t_1}{x_1}$, соотношение (4.23)

записано в виде

$$\frac{\tau\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^{\frac{m}{m+2}}} = \gamma x_1^{\frac{2}{m+2}} \int_0^1 \frac{\nu\left(\frac{x_1\theta}{1+x_1\theta}\right) d\theta}{(1+x_1\theta)^{\frac{m+4}{m+2}} (1-\theta)^{\frac{m}{m+2}}} + \frac{F_1\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)}{(1+x_1)^{\frac{m}{m+2}}}. \quad (4.24)$$

К обеим частям равенства (4.24) применим преобразование Меллина

$$F(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx.$$

Получим

$$\int_0^\infty x^{s-1} \frac{\tau\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}} dx = \gamma \int_0^\infty x^{s-1} dx \cdot x^{\frac{2}{m+2}} \int_0^1 \frac{\nu\left(\frac{x\theta}{1+x\theta}\right) d\theta}{(1+x\theta)^{\frac{m+4}{m+2}} (1-\theta)^{\frac{m}{m+2}}} + \int_0^\infty x^{s-1} \frac{F_1\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}} dx. \quad (4.25)$$

Используем формулу [79, с. 269]

$$\int_0^\infty x^{s-1} dx \cdot x^\alpha \int_0^\infty \theta^\beta u(x\theta) v(\theta) d\theta = \int_0^\infty x^{s+\alpha-1} u(x) dx \cdot \int_0^\infty x^{-s-\alpha+\beta} v(x) dx.$$

Полагая

$$\alpha = \frac{2}{m+2},$$

$$\beta = 0,$$

$$u(x) = \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}} \quad \text{или} \quad u(x\theta) = \frac{\nu\left(\frac{x\theta}{1+x\theta}\right)}{(1+x\theta)^{\frac{m+4}{m+2}}},$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^{\frac{m}{m+2}}}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

получим

$$\int_0^\infty x^{s-1} dx \cdot x^{\frac{2}{m+2}} \int_0^1 \frac{\nu\left(\frac{x\theta}{1+x\theta}\right) d\theta}{(1+x\theta)^{\frac{m+4}{m+2}} (1-\theta)^{\frac{m}{m+2}}} = \int_0^\infty x^{s+\frac{2}{m+2}-1} \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right) d\theta}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}} dx \cdot \int_0^1 \frac{x^{-s-\frac{2}{m+2}} dx}{(1-x)^{\frac{m}{m+2}}} =$$

$$= \int_0^{\infty} x^{s-\frac{m}{m+2}} \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right) d\theta}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}} dx \cdot \int_0^1 x^{-s-\frac{2}{m+2}} (1-x)^{-\frac{m}{m+2}} dx. \quad (4.26)$$

Используя формулу [82, с. 21]

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 0, b > 0, \quad (4.27)$$

получим, полагая

$$a-1 = -s - \frac{2}{m+2} \Leftrightarrow a = \frac{m}{m+2} - s,$$

$$b-1 = -\frac{m}{m+2} \Leftrightarrow b = \frac{2}{m+2},$$

$$a+b = 1-s,$$

следующее соотношение

$$\int_0^1 x^{-s-\frac{2}{m+2}} (1-x)^{-\frac{m}{m+2}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right) \Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma(1-s)}, \quad (4.28)$$

причем, исходя из условий формулы (4.27), должно быть выполнено следующее условие

$$\left. \begin{array}{l} \frac{m}{m+2} - s > 0 \\ \frac{2}{m+2} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow s < \frac{m}{m+2}. \quad (4.29)$$

Учитывая соотношения (4.26) и (4.28), из формулы (4.25) получим

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{\tau\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}} dx = \gamma \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right) \Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma(1-s)} \int_0^{\infty} x^{s-\frac{m}{m+2}} \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right) d\theta}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}} dx + \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{F_1\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}} dx.$$

Обозначая

$$\bar{\tau}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{\tau\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}} dx, \quad (4.30)$$

$$\bar{\nu}(s) = \int_0^\infty x^{s-\frac{m}{m+2}} \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}} dx = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot \frac{x^{\frac{2}{m+2}}}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}} \nu\left(\frac{x}{1+x}\right) dx, \quad (4.31)$$

$$\bar{F}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \frac{F_1\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}} dx, \quad (4.32)$$

окончательно имеем

$$\bar{\tau}(s) = \gamma \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right) \Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma(1-s)} \bar{\nu}(s) + \bar{F}(s). \quad (4.33)$$

Равенство (4.33), в котором параметр s должен удовлетворять условию (4.29), есть основное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученное в ходе решения задачи Коши-Гурса в гиперболической части.

4.3 Исследование задачи в эллиптической части области

В эллиптической части области Ω_1^+ рассмотрим следующую задачу

$$u_{xx} + u_{y_1 y_1} + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{u_{y_1}}{y_1} = f_1(x, y_1), \quad (4.34)$$

$$u|_{\sigma_\delta} = 0, \quad (4.35)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad (4.36)$$

где

$$\sigma_\delta = \left\{ (x, y) : \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y_1 + \delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad -\infty < \delta < +\infty \right\}.$$

Сделаем следующую замену переменных

$$x = \frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, \quad y_1 = \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{x^2 + y_1^2}{(1-x)^2 + y_1^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{y_1}{x(1-x) - y_1^2}, \quad (4.37)$$

а также замену функции

$$u(x, y_1) = \frac{u_1 \left(\sqrt{\frac{x^2 + y_1^2}{(1-x)^2 + y_1^2}}, \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x(1-x) - y_1^2} \right)}{\left((1-x)^2 + y_1^2 \right)^{\frac{m}{2(m+2)}}} \Leftrightarrow u(x, y_1) = (1 + 2r \cos \varphi + r^2)^{\frac{m}{2(m+2)}} u_1(r, \varphi). \quad (4.38)$$

В результате получим следующую задачу

$$r^2 u_{1rr} + \frac{2(m+1)}{m+2} r u_{1r} + u_{1\varphi\varphi} + \frac{m}{m+2} \operatorname{ctg} \varphi \cdot u_{1\varphi} = f_2(r, \varphi), \quad (4.39)$$

$$u_1|_{\sigma_\delta} = 0, \quad (4.40)$$

$$u_1(r, 0) = \frac{\tau \left(\frac{r}{1+r} \right)}{(1+r)^{\frac{m}{m+2}}}, \quad (4.41)$$

где

$$\sigma_\delta = \{(r, \varphi): \varphi = \gamma_\delta, \quad r > 0, \quad -\infty < \delta < +\infty\},$$

$$f_2(r, \varphi) = \frac{r^2}{(1 + 2r \cos \varphi + r^2)^2} f_1 \left(\frac{r^2 + r \cos \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2}, \frac{r \sin \varphi}{1 + 2r \cos \varphi + r^2} \right). \quad (4.42)$$

а определение (4.6) функции $v(x)$ запишется в виде

$$\left(\frac{m+2}{2} \right)^{\frac{m}{m+2}} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot u_{1\varphi}(r, \varphi) = \frac{r^{\frac{m}{m+2}} v \left(\frac{r}{1+r} \right)}{(1+r)^{\frac{m+4}{m+2}}}. \quad (4.43)$$

К задаче (4.39)-(4.41) и к соотношению (4.43) применим преобразование Меллина. Используя формулы [80, с. 541]

$$\int_0^\infty r^{s-1} r^2 u_{rr} dr = (s+1)s \int_0^\infty r^{s-1} u dr,$$

$$\int_0^\infty r^{s-1} r u_r dr = -s \int_0^\infty r^{s-1} u dr,$$

и обозначив

$$\bar{f}(s, \varphi) = \int_0^\infty r^{s-1} f_2(r, \varphi) dr, \quad (4.44)$$

$$\bar{u}(s, \varphi) = \int_0^\infty r^{s-1} u_1(r, \varphi) dr, \quad (4.45)$$

а также учитывая введенные ранее определения (4.30) и (4.31) функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{v}(s)$, из задачи (4.39)-(4.41) получим следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке $[0, \gamma_\delta]$:

$$\bar{u}_{\varphi\varphi} + \frac{m}{m+2} \operatorname{ctg} \varphi \cdot \bar{u}_\varphi + s \left(s - \frac{m}{m+2} \right) \bar{u} = \bar{f}(s, \varphi), \quad (4.46)$$

$$\bar{u} \Big|_{\varphi=\gamma_\delta} = 0, \quad (4.47)$$

$$\bar{u} \Big|_{\varphi=0} = \bar{\tau}(s), \quad (4.48)$$

а условие (4.43) запишется в виде

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \bar{u}_\varphi(s, \varphi) = \left(\frac{2}{m+2} \right)^{\frac{m}{m+2}} \bar{v}(s). \quad (4.49)$$

Решение задачи (4.46)-(4.48) записывается в виде [64]

$$\bar{u}(s, \varphi) = \bar{\tau}(s) \cdot \bar{u}_2(s, \varphi) + \bar{u}_1(s, \varphi) \int_\varphi^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + \bar{u}_2(s, \varphi) \int_0^\varphi \frac{\bar{u}_1(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt, \quad (4.50)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(s, \varphi) &= \left(\frac{1 - \cos \varphi}{2} \right)^{\frac{1}{m+2}} F \left(s + \frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2} - s; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right) = \\ &= \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2}{m+2}} F \left(s + \frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2} - s; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\bar{u}_2(s, \varphi) = F \left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right) - F \left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2} \right) \cdot \frac{\bar{u}_1(s, \varphi)}{\bar{u}_1(s, \gamma_\delta)}, \quad (4.52)$$

$$\Delta(s, t) = \bar{u}_{1t}(s, t) \bar{u}_2(s, t) - \bar{u}_1(s, t) \bar{u}_{2t}(s, t). \quad (4.53)$$

Подставив найденное решение (4.50) в соотношение (4.49), учитывая формулы (4.51)-(4.53), а также формулу для производной гипергеометрической функции [83, с. 110]

$$\frac{dF(a, b; c; z)}{dz} = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z), \quad (4.54)$$

получим последовательно

$$\begin{aligned} \bar{u}_{1\varphi} &= \frac{1}{m+2} \cdot \left(\frac{1-\cos\varphi}{2} \right)^{\frac{m+1}{m+2}} \cdot \frac{\sin\varphi}{2} \cdot F\left(s + \frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2} - s; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right) + \\ &+ \left(\frac{1-\cos\varphi}{2} \right)^{\frac{1}{m+2}} \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{m+2}\right)\left(\frac{m+1}{m+2} - s\right)}{\frac{m+3}{m+2}} \cdot F\left(s + \frac{m+3}{m+2}, \frac{2m+3}{m+2} - s; \frac{2m+5}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right) \cdot \frac{\sin\varphi}{2} = \\ &= \frac{1}{m+2} \cdot \left(\sin\frac{\varphi}{2} \right)^{-\frac{2m+2}{m+2}} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot F\left(s + \frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2} - s; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right) + \\ &+ \left(\sin\frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2}{m+2}} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2} \frac{\left(s + \frac{1}{m+2}\right)\left(\frac{m+1}{m+2} - s\right)}{\frac{m+3}{m+2}} \cdot F\left(s + \frac{m+3}{m+2}, \frac{2m+3}{m+2} - s; \frac{2m+5}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{m+2} \cdot \left(\sin\frac{\varphi}{2} \right)^{-\frac{m}{m+2}} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot F\left(s + \frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2} - s; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right) + \\ &+ \frac{\left(s + \frac{1}{m+2}\right)\left(\frac{m+1}{m+2} - s\right)}{\frac{m+3}{m+2}} \left(\sin\frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{m+4}{m+2}} \cos\frac{\varphi}{2} \cdot F\left(s + \frac{m+3}{m+2}, \frac{2m+3}{m+2} - s; \frac{2m+5}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right); \\ \bar{u}_{2\varphi} &= \frac{s\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{\frac{m+1}{m+2}} F\left(s + 1, \frac{2m+2}{m+2} - s; \frac{2m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right) \cdot \frac{\sin\varphi}{2} - \\ &- \frac{F\left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{\bar{u}_1(s, \gamma_\delta)} \cdot \bar{u}_{1\varphi}(s, \varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_\varphi(s, \varphi) &= \bar{\tau}(s) \cdot \bar{u}_{2\varphi}(s, \varphi) + \bar{u}_{1\varphi}(s, \varphi) \int_\varphi^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + \bar{u}_1(s, \varphi) \cdot \left(-\frac{\bar{u}_2(s, \varphi) \bar{f}(s, \varphi)}{\Delta(s, \varphi)} \right) \\ &+ \bar{u}_{2\varphi}(s, \varphi) \int_0^\varphi \frac{\bar{u}_1(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + \bar{u}_2(s, \varphi) \cdot \frac{\bar{u}_1(s, \varphi) \bar{f}(s, \varphi)}{\Delta(s, \varphi)} = \\ &= \bar{\tau}(s) \cdot \bar{u}_{2\varphi}(s, \varphi) + \bar{u}_{1\varphi}(s, \varphi) \int_\varphi^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + \bar{u}_{2\varphi}(s, \varphi) \int_0^\varphi \frac{\bar{u}_1(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \bar{u}_{1\varphi}(s, \varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \frac{1}{m+2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{-\frac{m}{m+2}} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot F \left(s + \frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2} - s; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right) + \\
&+ \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \frac{\left(s + \frac{1}{m+2} \right) \left(\frac{m+1}{m+2} - s \right)}{\frac{m+3}{m+2}} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{m+4}{m+2}} \cos \frac{\varphi}{2} F \left(s + \frac{m+3}{m+2}, \frac{2m+3}{m+2} - s; \frac{2m+5}{m+2}; \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right) = \\
&= \frac{1}{m+2} \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{m}{m+2}} \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{-\frac{m}{m+2}} = \frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \bar{u}_{2\varphi}(s, \varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \frac{s \left(\frac{m}{m+2} - s \right)}{\frac{m+1}{m+2}} F \left(s + 1, \frac{2m+2}{m+2} - s; \frac{2m+3}{m+2}; \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right) \cdot \frac{\sin \varphi}{2} - \\
&- \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \frac{F \left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2} \right)}{\bar{u}_1(s, \gamma_\delta)} \cdot \bar{u}_{1\varphi}(s, \varphi) = -\frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2} \cdot \frac{F \left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2} \right)}{\bar{u}_1(s, \gamma_\delta)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \bar{u}_\varphi(s, \varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \bar{\tau}(s) \bar{u}_{2\varphi}(s, \varphi) + \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \bar{u}_{1\varphi}(s, \varphi) \int_{\varphi}^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + \\
&+ \lim_{\varphi \rightarrow 0} \sin^{\frac{m}{m+2}} \varphi \cdot \bar{u}_{2\varphi}(s, \varphi) \int_0^\varphi \frac{\bar{u}_1(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt = -\frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2} \cdot \frac{F \left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2} \right)}{\bar{u}_1(s, \gamma_\delta)} \bar{\tau}(s) + \\
&+ \frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + 0 = \\
&= -\frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2} \cdot \frac{F \left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2} \right)}{\bar{u}_1(s, \gamma_\delta)} \bar{\tau}(s) + \frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt.
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом последнего соотношения, перепишем условие (4.49) в виде

$$\left(\frac{2}{m+2} \right)^{\frac{m}{m+2}} \nu(s) = -\frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2} \cdot \frac{F \left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2} \right)}{\bar{u}_1(s, \gamma_\delta)} \bar{\tau}(s) + \frac{2^{\frac{m}{m+2}}}{m+2} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt. \quad (4.55)$$

Используя формулы [84, с. 340 – 341]

$$F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z), \quad (4.56)$$

$$F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z), \quad (4.57)$$

получим

$$F\left(s + \frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2} - s; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right) = F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\varphi}{2}\right);$$

$$F\left(s, \frac{m}{m+2} - s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{2}\right)^{\frac{1}{m+2}} F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right).$$

Таким образом, из формулы (4.55) имеем

$$\bar{v}(s) = -\frac{\bar{\tau}(s)}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{1-\cos\gamma_\delta}\right)^{\frac{1}{m+2}} \frac{F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)} + \frac{\int_0^{\gamma_\delta} \bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t) dt}{\Delta(s, t)} \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}}. \quad (4.58)$$

Используя выражение для присоединенной функции Лежандра [84, с. 321]

$$P_\nu^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad (4.59)$$

получим

$$P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{1-\cos\gamma_\delta}\right)^{\frac{1}{2(m+2)}} F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right),$$

$$P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{1-\cos\gamma_\delta}\right)^{\frac{1}{2(m+2)}} F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right),$$

откуда

$$\frac{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{1-\cos\gamma_\delta}\right)^{\frac{1}{m+2}} \cdot \frac{F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}. \quad (4.60)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{1-\cos\gamma_\delta}\right)^{\frac{1}{m+2}} \cdot \frac{F\left(\frac{m+1}{m+2}-s, s+\frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{F\left(\frac{m+1}{m+2}-s, s+\frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}.$$

Таким образом, соотношение (4.58) примет следующий вид:

$$\bar{\nu}(s) = -\frac{\bar{\tau}(s)}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)} + \frac{\int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}}. \quad (4.61)$$

Равенство (4.61) есть основное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, полученное в эллиптической части.

4.4 Определение свойств решений

Теперь из двух равенств (4.33) и (4.61) выразим функции $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$, учитывая обозначения (4.18) и (4.19).

$$\begin{cases} \bar{\tau}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2(m+2)}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)} \cdot \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right) \Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma(1-s)} \bar{\nu}(s) + \bar{F}(s), \\ \bar{\nu}(s) = -\frac{\bar{\tau}(s)}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)}{P_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos\gamma_\delta)} + \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt. \end{cases} \quad (4.62)$$

Учитывая формулы для гамма-функции [85, с. 34]

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (4.63)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.64)$$

получим

$$\frac{1}{m+2} \Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right) = \Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right) = \frac{2^{\frac{m}{m+2}-1} \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\sqrt{\pi}},$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right) = \frac{2^{\frac{2}{m+2}-1} \Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right) \Gamma\left(\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2(m+2)}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{m}{m+2}\right)} \cdot \left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{m}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right) \Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma(1-s)} = \\ & = \frac{2^{\frac{2m}{m+2}-1}}{(m+2)^{\frac{m}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}\right) \cdot \frac{2^{\frac{2}{m+2}-1} \Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right) \Gamma\left(\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}{\sqrt{\pi}}}{\Gamma\left(\frac{m+4}{2(m+2)}\right) \cdot \frac{2^{\frac{m}{m+2}-1} \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\sqrt{\pi}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{\Gamma(1-s)} = \\ & = \frac{2^{\frac{2m}{m+2}-1+\frac{2}{m+2}-1-\frac{m}{m+2}+1}}{m+2} \cdot (m+2)^{\frac{2}{m+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{\Gamma(1-s)} = (m+2)^{\frac{2}{m+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{\Gamma(1-s)}. \end{aligned}$$

Таким образом, система (4.62) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \bar{\tau}(s) = (m+2)^{\frac{2}{m+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{\Gamma(1-s)} \cdot \bar{\nu}(s) + \bar{F}(s), \\ \bar{\nu}(s) = \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \left(\int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt - \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{\mathbf{P}_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathbf{P}_{s-\frac{m+1}{m+2}}^{\frac{1}{m+2}}(\cos \gamma_\delta)} \cdot \bar{\tau}(s) \right). \end{cases} \quad (4.65)$$

Отсюда

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{\Gamma(1-s)} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} \cdot \bar{\tau}(s) + \bar{F}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} \cdot \bar{\tau}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt - \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} \cdot \bar{\tau}(s) + \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} \cdot \bar{F}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} \right) \bar{\tau}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt + \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} \cdot \bar{F}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}(s) = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt + \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} \cdot \bar{F}(s)}{\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}} ;$$

$$\bar{v}(s) = \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt - \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} \times$$

$$\times (m+2)^{\frac{2}{m+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{\Gamma(1-s)} \cdot \bar{v}(s) - \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} \cdot \bar{F}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{v}(s) = \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s,t) \bar{f}(s,t)}{\Delta(s,t)} dt - \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{\Gamma(1-s)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{\mathcal{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} \cdot \bar{v}(s) -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}{\mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})} \cdot \bar{F}(s) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \cdot \bar{v}(s) = \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \cdot \int_0^{\gamma_{\delta}} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt - \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}{\mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})} \cdot \bar{v}(s) - \\
& - \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}{\mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})} \cdot \bar{F}(s) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} + \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}{\mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})} \right) \cdot \bar{v}(s) = \\
= & \frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \cdot \int_0^{\gamma_{\delta}} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt - \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}{\mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})} \cdot \bar{F}(s) \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow & \bar{v}(s) = \frac{\frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \cdot \int_0^{\gamma_{\delta}} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt - \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \cdot \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}{\mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})} \cdot \bar{F}(s) \right)}{\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} + \frac{\frac{1}{s-\frac{m+1}{m+2}} \mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}{\mathbf{P}_{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_{\delta})}}.
\end{aligned}$$

В итоге, из системы (65) имеем

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} \cdot \bar{F}(s)}{\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}}, \quad (4.66)$$

$$\bar{\nu}(s) = \frac{\frac{1}{(m+2)^{\frac{2}{m+2}}} \cdot \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt - \frac{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)} \cdot \bar{F}(s) \right)}{\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}{P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos \gamma_\delta)}}. \quad (4.67)$$

Проанализируем, прежде всего, определения (4.30) и (4.31) функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$ и их связь с исходными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

$$\bar{\tau}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \frac{\tau\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m}{m+2}}} dx = \left| \begin{array}{lll} \frac{x}{1+x} = t; & x = \frac{t}{1-t}; & x=0 \quad t=0; \\ 1+x = \frac{1}{1-t}; & dx = \frac{dt}{(1-t)^2}; & x=\infty \quad t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{s-1} \frac{\tau(t)}{\frac{1}{(1-t)^{\frac{m}{m+2}}}} \frac{dt}{(1-t)^2} =$$

$$= \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{1-s+\frac{m}{m+2}-2} \tau(t) dt = \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{\left(\frac{m}{m+2}-s\right)-1} \tau(t) dt;$$

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(s) &= \int_0^\infty x^{s-\frac{m}{m+2}} \frac{\nu\left(\frac{x}{1+x}\right)}{(1+x)^{\frac{m+4}{m+2}}} dx = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{s-\frac{m}{m+2}} \frac{\nu(t)}{\left(\frac{1}{1-t}\right)^{\frac{m+4}{m+2}} (1-t)^2} dt = \int_0^1 t^{s-\frac{m}{m+2}} (1-t)^{\frac{m}{m+2}-s+\frac{m+4}{m+2}-2} \nu(t) dt = \\ &= \int_0^1 t^{s-\frac{m}{m+2}} (1-t)^{-s} \nu(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{\tau}(s) = \int_0^1 t^{s-1} (1-t)^{\left(\frac{m}{m+2}-s\right)-1} \tau(t) dt, \quad \bar{\nu}(s) = \int_0^1 t^{s-\frac{m}{m+2}} (1-t)^{-s} \nu(t) dt,$$

где, согласно условию (4.29), $-\infty < s < \frac{m}{m+2}$.

В итоге, мы видим, что если функция $\bar{\tau}(s)$ непрерывна на промежутке

$$\frac{m}{m+2} - n < s < \frac{m}{m+2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.68)$$

то функция $\tau(x)$ непрерывна в точке $B(1,0)$ и должна обращаться в нуль порядка $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ в точке $A(0,0)$, то есть в этом случае решение является $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярным.

Отметим также, что, в отличие от уравнения Лаврентьева-Бицадзе, гладкость функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ отличается не на 1, а на $\frac{2}{m+2}$.

Таким образом, нам необходимо выяснить, при каких углах γ_δ и правых частях $f(x, y)$ функция $\bar{\tau}(s)$ (а одновременно с ней и $\bar{\nu}(s)$, как видно из соотношений (4.66) и (4.67)) будет непрерывной на промежутке (4.68).

Иными словами, исходя из соотношений (4.66) и (4.67), нам необходимо решить уравнение

$$R(s, \gamma_\delta) \equiv \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P_{\frac{m+2}{m+1}}^{m+2}(\cos \gamma_\delta)}{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P_{\frac{m+2}{m+1}}^{m+2}(\cos \gamma_\delta)} = 0 \quad (4.69)$$

на промежутке (4.68), а также, учитывая (4.66) и (4.67), выяснить, каким условиям должна удовлетворять $f(x, y)$, чтобы было выполнено равенство

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \int_0^{\gamma_\delta} \frac{\bar{u}_2(s, t) \bar{f}(s, t)}{\Delta(s, t)} dt + \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} \cdot \bar{F}(s) = 0, \quad (4.70)$$

где s удовлетворяет соотношению (4.69).

Перейдем к исследованию уравнения (4.69). Используя формулу (4.60), из уравнения (4.69) получим

$$R(s, \gamma_\delta) \equiv \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \left(\frac{1 + \cos \gamma_\delta}{1 - \cos \gamma_\delta}\right)^{\frac{1}{m+2}} \frac{F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2}\right)}{F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1 - \cos \gamma_\delta}{2}\right)} = 0. \quad (4.71)$$

Из формулы (57) имеем

$$F\left(\frac{m+1}{m+2}-s, s+\frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right) = \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{2}\right)^{-\frac{1}{m+2}} F\left(s, \frac{m}{m+2}-s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right),$$

откуда соотношение (71) запишется как

$$R(s, \gamma_\delta) \equiv -\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \left(\frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)^{-\frac{1}{m+2}} \frac{F\left(s, \frac{m}{m+2}-s; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{F\left(\frac{m+1}{m+2}-s, s+\frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)} = 0. \quad (4.72)$$

Изучим, таким образом, нули функции $R(s, \gamma_\delta)$ на промежутке (4.68). При этом особое внимание будем уделять случаю $n=1$ в соотношении (4.68), так как тогда решение $u_0(x, y)$ однородной задачи Трикоми будет принадлежать классу $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим, прежде всего, поведение функции $R(s, \gamma_\delta)$ при различных значениях угла γ_δ .

1) $\gamma_\delta \rightarrow +0$ ($\delta \rightarrow +\infty$)

Из формулы (72) видно, что при этом $R(s, \gamma_\delta) \rightarrow +\infty$.

2) $\gamma_\delta \rightarrow \pi - 0$ ($\delta \rightarrow -\infty$)

Используя формулу [83, с. 112]

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a+b), \quad c \neq 0, -1, -2, \dots,$$

получим

$$F\left(s, \frac{m}{m+2}-s; \frac{m+1}{m+2}; 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right)},$$

$$F\left(\frac{m+1}{m+2}-s, s+\frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{2}{m+2}\right)\Gamma(1-s)}.$$

Таким образом, при $\gamma_\delta = \pi$ соотношение (4.72) запишется в виде

$$\begin{aligned}
R(s, \pi) &\equiv \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(s+\frac{2}{m+2}\right)\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} + \frac{\Gamma\left(s+\frac{2}{m+2}\right)\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right)} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow R(s, \pi) \equiv \frac{\Gamma(1-s)\left(\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right) + \Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{m+2}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right)} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая формулу [83, с. 18]

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (4.73)$$

получим

$$\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)},$$

$$\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{m+2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)},$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right) + \Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{2}{m+2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)} + \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} = \\
&= \frac{\pi}{\sin \pi\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\sin \pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} \left(\sin \pi\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right) + \sin \pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right) \right).
\end{aligned}$$

В итоге имеем окончательно

$$R(s, \pi) \equiv \frac{\pi\Gamma(1-s)\left(\sin \pi\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right) + \sin \pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{m+2}\right)\sin \pi\left(\frac{m+1}{m+2}-s\right)\sin \pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} = 0.$$

Отсюда получим

$$\sin \pi \left(\frac{m+1}{m+2} - s \right) + \sin \pi \left(\frac{m}{m+2} - s \right) = 0; \quad \sin \pi \left(\frac{m+1}{m+2} - s \right) = -\sin \pi \left(\frac{m}{m+2} - s \right);$$

$$\pi \left(\frac{m+1}{m+2} - s \right) = -\pi \left(\frac{m}{m+2} - s \right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{m+1}{m+2} - s = s - \frac{m}{m+2} + 2k \Rightarrow 2s = \frac{2m+1}{m+2} - 2k \Rightarrow s = \frac{2m+1}{2(m+2)} - k.$$

Так как $s < \frac{m}{m+2} = \frac{2m}{2(m+2)} < \frac{2m+1}{2(m+2)} = \frac{2m+1}{2(m+2)} - k$ при $k \leq 0$, то $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, при

$$s = \frac{2m+1}{2(m+2)} - 1 = -\frac{3}{2(m+2)} = \frac{-\frac{3}{2}}{m+2} \in \left(-\frac{2}{m+2}; \frac{m}{m+2} \right),$$

$$s = \frac{-\frac{3}{2}}{m+2} - 1 \in \left(-\frac{2}{m+2} - 1; \frac{-2}{m+2} \right),$$

.....,

$$s = \frac{-\frac{3}{2}}{m+2} - (n-1) \in \left(-\frac{2}{m+2} - (n-1); \frac{-2}{m+2} - (n-2) \right),$$

.....,

функция $R(s, \gamma_\delta)$ обращается в нуль, причем каждое из значений s принадлежит соответствующему интервалу длиной 1.

То же самое можно показать и иным путем. Используя полученное ранее значение функции $R(s, \gamma_\delta)$ при $\gamma_\delta \rightarrow \pi - 0$

$$R(s, \pi) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\Gamma\left(s + \frac{2}{m+2}\right)\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2} - s\right)\Gamma\left(s + \frac{1}{m+2}\right)},$$

получим

$$R\left(-\frac{2}{m+2} + 0, \pi\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+4}{m+2}\right)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma(+0)\Gamma\left(\frac{m+4}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{m+2}\right)} \rightarrow -\infty,$$

$$R\left(\frac{m}{m+2}-0, \pi\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma(+0)} + \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, при $\gamma_\delta \rightarrow \pi-0$ на интервале $-\frac{2}{m+2} < s < \frac{m}{m+2}$ имеем $-\infty < R(s, \gamma_\delta) < +\infty$, кроме того $R(s, \gamma_\delta)$ на этом интервале непрерывна, кроме точки $s = -\frac{1}{m+2}$, в которой имеет устранимый разрыв, причем при $s \rightarrow -\frac{1}{m+2}$ имеем

$$R(s, \gamma_\delta) \rightarrow \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} > 0,$$

следовательно, внутри промежутка $\left(-\frac{2}{m+2}, \frac{m}{m+2}\right)$ у функции $R(s, \gamma_\delta)$ обязательно найдется нуль. Аналогичные рассуждения верны и для каждого следующего из промежутков (68) при $n = 2, 3, \dots$.

3) $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$ ($\delta = 0$)

При $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$ $\cos \gamma_\delta = 0$. Учитывая формулу [83, с. 112]

$$F\left(a, 1-a; b; \frac{1}{2}\right) = 2^{1-b} \frac{\Gamma(b)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right)}, \quad b \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (4.74)$$

получим

$$F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1}{2}\right) = 2^{1-\frac{m+1}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2} - \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},$$

$$F\left(\frac{m+1}{m+2} - s, s + \frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1}{2}\right) = 2^{1-\frac{m+3}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m+4}{2(m+2)}\right)},$$

откуда

$$\frac{F\left(\frac{m+1}{m+2}-s, s+\frac{1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{F\left(\frac{m+1}{m+2}-s, s+\frac{1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)} = 2^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)},$$

а из соотношения (4.71) получим

$$\begin{aligned} R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) &\equiv \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \left(\frac{1+0}{1-0}\right)^{\frac{1}{m+2}} \cdot 2^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} + 2^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)} = 0. \end{aligned}$$

Используя формулу (4.64), получим

$$\begin{aligned} \Gamma(1-s) &= \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right) &= \frac{2^{-s-\frac{2}{m+2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2}-s\right)} = \frac{\frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\frac{2^{-s-\frac{2}{m+2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right)} = 2^{\frac{2}{m+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right)}.$$

В результате имеем окончательно

$$R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) \equiv 2^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}-\frac{s}{2}\right)} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)}-\frac{s}{2}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{m+4}{2(m+2)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) \equiv \frac{2^{\frac{2}{m+2}} \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m+4}{2(m+2)}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)} - \frac{s}{2}\right) \right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)} = 0.$$

Из формулы (4.73) получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi(1-s)}{2}},$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m+4}{2(m+2)}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)} - \frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2}},$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) + \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m+4}{2(m+2)}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)} - \frac{s}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin \frac{\pi(1-s)}{2}} + \frac{\pi}{\sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{\sin \frac{\pi(1-s)}{2} \sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2}} \left(\sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2} + \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) &\equiv \frac{\pi 2^{\frac{2}{m+2}} \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(\sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2} + \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2(m+2)} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right) \sin \frac{\pi(1-s)}{2} \sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2} + \sin \frac{\pi(1-s)}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2} - s\right)}{2} = -\sin \frac{\pi(1-s)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi\left(\frac{m}{m+2}-s\right)}{2} = -\frac{\pi(1-s)}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\frac{m}{m+2}+1-2s}{2} = 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\frac{m+1}{m+2}-2s}{2} = 2k \Rightarrow \frac{m+1}{m+2}-s = 2k \Rightarrow s = \frac{m+1}{m+2} - 2k.$$

Таким образом, равенство $R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) = 0$ выполняется при $s = \frac{m+1}{m+2} - 2k$, $k = 1, 2, \dots$ (при $k \leq 0$ имеем $s \geq \frac{m+1}{m+2}$, что противоречит условию $s < \frac{m}{m+2}$).

В итоге, функция $R(s, \gamma_\delta)$ в случае $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$ обращается в нуль при

$$s = -\frac{m+3}{m+2}, \quad s = -\frac{m+3}{m+2} - 2, \quad s = -\frac{m+3}{m+2} - 4, \quad \dots,$$

то есть первое значение s не лежит в промежутке (4.68) при $n=1$, а соответствующее решение однородной задачи не принадлежит классу $L_2(\Omega)$.

Таким образом, анализируя зависимость существования нулей функции $R(s, \gamma_\delta)$ на промежутках (4.68) от угла γ_δ , мы видим, что чем меньше угол, тем «дальше» в отрицательную сторону находятся нули и тем больше расстояние между ними, то есть тем реже они встречаются (а при $\gamma_\delta = 0$ нулей нет вообще); чем больше угол – тем нули «ближе» (при $\gamma_\delta \rightarrow \pi$ обязательно найдется нуль уже в первом промежутке (4.68)). Кроме того, при $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$

«первый» нуль $\left(s = -\frac{m+3}{m+2}\right)$, а также все последующие нули не принадлежат первому промежутку (4.68), а соответствующее решение однородной задачи не принадлежит классу $L_2(\Omega)$.

В результате можно сделать вывод, что порядок особенностей решений однородной задачи зависит от угла γ_δ : при больших углах (близких к π , и обязательно больших, чем $\frac{\pi}{2}$) этот порядок будет меньше 1, а соответствующее решение однородной задачи принадлежит классу $L_2(\Omega)$.

Проанализируем теперь нули функции $R(s, \gamma_\delta)$ в зависимости от s .

$$1) \quad s = \frac{m}{m+2} - 0$$

$$R(s, \gamma_\delta) = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{m+2}\right)}{\Gamma(+0)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{1-\cos\gamma_\delta} \right)^{\frac{1}{m+2}} \frac{F\left(\frac{1}{m+2}, s, \frac{m+1}{m+2}; \frac{m+1}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)}{F\left(\frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2}; \frac{m+3}{m+2}; \frac{1-\cos\gamma_\delta}{2}\right)} \rightarrow +\infty$$

$$2) s = -\frac{1}{m+2}$$

$$R(s, \gamma_\delta) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{m+3}{m+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{m+2}\right)} \left(\frac{1+\cos\gamma_\delta}{1-\cos\gamma_\delta} \right)^{\frac{1}{m+2}} > 0 \quad \text{при} \quad \gamma_\delta > 0.$$

Отметим, что если $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$, то $R\left(s, \frac{\pi}{2}\right) = 0$ при $s = -\frac{m+3}{m+2} - 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Если $s = -\frac{m+3}{m+2}$, то, потребовав, чтобы и числитель в формулах (4.66) и (4.67) обращался в нуль, получим условие в эллиптической части на функцию $f(x, y)$:

$$\iint_{\Omega^+} f(x, y) x(x, y) dx dy,$$

где

$$v(x, y) = \frac{(\sin\varphi)^{\frac{m}{m+2}}}{r^{\frac{m+3}{m+2}}} \cdot \left(\left(\frac{1+\cos\varphi}{2} \right)^{\frac{1}{m+2}} \left(\frac{m+2}{m+1} \cos\varphi - \frac{1}{m+1} \right) + \left(\frac{1-\cos\varphi}{2} \right)^{\frac{1}{m+2}} \left(\frac{m+2}{m+1} \cos\varphi + \frac{1}{m+1} \right) \right).$$

Заключение. Проводя анализ функций $\bar{\tau}(s)$ и $\bar{\nu}(s)$, определяемых из соотношений (4.30) и (4.31), и их связь с исходными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, доказана следующая основная теорема.

Теорема 4.5 *Необходимым и достаточным условием $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярности решения задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта является необращение функции*

$$R(s, \gamma_\delta) \equiv \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{m}{m+2} - s\right)} + \frac{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos\gamma_\delta)}{\frac{1}{s - \frac{m+1}{m+2}} P^{\frac{m+2}{m+1}}(\cos\gamma_\delta)} = 0$$

в нуль на промежутке $\frac{m}{m+2} - n < s < \frac{m}{m+2}$, $n = 1, 2, \dots$. При $\gamma_\delta \rightarrow 0$ решение будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярным для любого конечного n , а при $\gamma_\delta \rightarrow \pi$ решение не будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярным для любого n . При $\gamma_\delta = \frac{\pi}{2}$ решение будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ регулярным только для $n=1$. В случае, если решение не будет $\left(n - \frac{m}{m+2}\right)$ -регулярным – на правую часть уравнения Геллерстедта должны быть наложены дополнительные условия.

Заключение

По результатам сделанных исследований можно сделать следующие основные выводы.

1) Была рассмотрена задача Трикоми для уравнений Лаврентьева–Бицадзе и Геллерстедта в случае, когда эллиптическая часть границы совпадает с частью некоторой окружности для уравнений Лаврентьева–Бицадзе и с кривой особого типа для уравнения Геллерстедта.

2) Для однородного уравнения Лаврентьева–Бицадзе введен новый класс решений, не являющихся непрерывными в угловых точках области, и построены в явном виде нетривиальные решения из этого класса.

3) Для неоднородного уравнения Лаврентьева–Бицадзе введено понятие n - регулярного решения и доказан критерий существования такого решения.

4) Для уравнения Геллерстедта получен критерий существования n - регулярного решения в терминах углов подхода кривой в эллиптической части области к линии изменения типа уравнения.

5) Доказательство основано на использовании интегрального преобразования Меллина и свойств специальных функций.

В монографии применены методы интегральных преобразований, методы специальных функций, интегральное представление решений, методы теории функций комплексного переменного, методы априорных оценок, метод разделения переменных.

Результаты монографии представляют прежде всего теоретический интерес. Полученные результаты по исследованию свойств решений краевых задач для уравнений смешанного типа могут послужить основой для дальнейшего изучения и обобщения различных свойств решений других дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе для распространения полученных результатов на краевые задачи с более общими уравнениями и краевыми условиями. Отметим, что принципиальное отличие данной монографии от предыдущих исследований заключается в том, что ранее задача Трикоми изучалась для областей, которые в эллиптической части ограничены кривой либо совпадающей с нормальной или бесконечно гладкой кривой, либо оканчивающейся малыми дугами кривых данного типа. В настоящей же работе задача Трикоми изучена для кривой гораздо более общего вида. Полученные результаты позволяют надеяться на их распространение на контуры самого общего вида, в том числе на контуры с так называемым "неортогональным подходом" кривой в эллиптической части рассматриваемой области к линии изменения типа уравнения. Основные результаты монографии подтверждены работами автора [86]-[114].

Изучение свойств решений краевых задач для уравнений смешанного типа может найти дальнейшее применение при исследовании конкретных прикладных задач, в частности, при описании движения околосзвукового течения газов, теории бесконечно малых изгибов поверхностей, теории распространения волн, магнитодинамических течений и других разделов механики и физики.

Литература

- 1 Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2^o ordine di tipo misto.- Mem. Lincei, Ser. V, XIV, fasc. VII (1923).
- 2 Cibrario M. Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto.- Rend. Lombardo, 1932, v.65, p. 889 – 906.
- 3 Gellerstedt S. Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivees partielles du second ordre de type mixte.- Thesis, Uppsala, 1935.
- 4 Gellerstedt S. Sur une equation lineaire aux derivees partielles de type mixte.- Arkiv Mat. Astr och Fysik, 25A, 1937, t. 10, p. 1 – 12.
- 5 Gellerstedt S. Quelques problemes mixtes pour l'equation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$.- Arkiv Mat. Astr och Fysik, 26A, 1938, t. 3, p. 1 – 32.
- 6 Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений// Известия АН СССР. Серия матем. №9, 1945, с. 121 – 142.
- 7 Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции.- М.: Физматгиз, 1959.
- 8 Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа.- Доклады АН СССР, 1950, т. 70, С. 373-376.
- 9 Бицадзе А.В. О некоторых задачах смешанного типа// Доклады АН СССР, 1950, Т. 70, №4, с. 561 – 565.
- 10 Бицадзе А.В. О единственности решения общей граничной задачи для уравнения смешанного типа// Сообщ. АН ГрузССР, 1950, Т. XI, №4, с. 423 – 428.
- 11 Бицадзе А.В. К общей задаче смешанного типа// Доклады АН СССР, 1951, Т. 78, №4, с. 621 – 624.
- 12 Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа// Труды МИ АН СССР, 1953 Т. 41, 59с.
- 13 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959, 164с.
- 14 Germain P., Bader R. Sur le probleme de Tricomi.- Compt. Rend. Acad. Sci, Paris, t. 232, p. 463 – 465.
- 15 Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа.- Дисс. ... доктора физ.-мат. наук, библи. МИ АН СССР, 1952.
- 16 Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type.- Communs Pure Appl. Math., 1953, v. 6, p. 455 – 470.
- 17 Protter M.H. Uniqueness theorems for the Tricomi problem.- J. Rational Mech. and Analysis, Part I, 1953, v. 2, p. 107 – 114; Part II, 1955, v. 4, p. 721 – 732.
- 18 Protter M.H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type.- J. Rational Mech. and Analysis, 1954, v. 3, N 4, p. 435 – 446.
- 19 Morawetz C.S. A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type.- Communs Pure and Appl. Math., 1958, v. XI, №3, p. 315 – 331.
- 20 Friedrichs K. Symmetric positive linear differential equations.- Communs Pure and Appl. Math., 1958, v. 11, p. 333 – 418.

- 21 Lax P.D., Phillips R.S. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators.- *Communs Pure and Appl. Math.*, 1960, v. 13, p. 427–455.
- 22 Березанский Ю.М. Энергетические неравенства для некоторых классов уравнений смешанного типа// *Доклады АН СССР*, 1962, т. 132, с. 9 – 12.
- 23 Березанский Ю.М. Существование слабых решений некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа// *Украинский матем. журнал*, 1963, т.15, №4, с. 347 – 364.
- 24 Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа// *Доклады АН СССР*, 1953, т. 88, №2, с. 197 – 200.
- 25 Кароль И.Л. К теории уравнений смешанного типа// *Доклады АН СССР*, 1953, т. 88, №3, с. 397 – 400.
- 26 Смирнов М.М. Обобщенное уравнение Трикоми// *Уч. зап. Белорусского гос. ун-та. Серия физ.-мат. наук*, 1951, №12, с. 3 – 9.
- 27 Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка// *Доклады АН СССР*, 1961, т. 136, №2, с. 274 – 276.
- 28 Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974, 156с.
- 29 Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979, 240с.
- 30 Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях// *Доклады АН СССР*, 1956, т. 110, №6.
- 31 Бицадзе А.В. Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях// *Доклады АН СССР*, 1962, т. 143, №5, с. 1017 – 1019.
- 32 Пулькин С.П. К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве// *Уч. зап. Куйб. гос. пед. ин-та*, 1956, №14, с. 63 – 77.
- 33 Врагов В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа на плоскости и в пространстве. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук, Новосибирск, 1971.
- 34 Кальменов Т.Ш. О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// *Дифференциальные уравнения*, 1977, т. 13, №8, с. 1718 – 1725.
- 35 Пономарев С.М. К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// *Доклады АН СССР*, 1977, т. 233, №1, с. 39 – 40.
- 36 Пономарев С.М. Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева-Бицадзе. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. М., 1981.
- 37 Моисеев Е.И. О задаче Трикоми для уравнения Геллерстедта// *Доклады АН СССР*, 1979, т. 246, №2, с. 463 – 466.
- 38 Моисеев Е.И. Решение задачи Трикоми в специальных областях// *Дифференциальные уравнения*, 1990, т. 26, №1, с. 93 – 103.
- 39 Франкль Ф.И. Об одной краевой задаче для уравнения $yz_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Уч. зап. МГУ*, 1951, т. 152, №111, с. 99 – 116.
- 40 Франкль Ф.И. О прямой задаче теории сопла Лаваля// *Уч. зап. Кабардино-Балкарского гос. ун-та*, 1959, №3, с. 35 – 60.

- 41 Protter M.H. An existence theorem for the generalized Tricomi problem.- Duke Math. Journal, 1954, v. 21, p. 1 – 7.
- 42 Михайлов В.П. Об обобщенной задаче Трикоми.- Доклады АН СССР, 1967, т. 175, с. 1012 – 1014.
- 43 Коврижкин В.В. Гладкость решений обобщенной задачи Трикоми.- Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, с. 97 – 105.
- 44 Солдатов А.П. О единственности решения одной задачи А.В.Бицадзе// дифференциальные уравнения, 1974, т. 8, Т1, с. 143 – 146.
- 45 Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения// Прикладная математика и механика, 1956, т. 20, с. 196 – 202.
- 46 Бицадзе А.В. Об одной задаче Франкля// Доклады АН СССР, 1956, т. 109.
- 47 Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина// Доклады АН СССР, 1957, т. 112.
- 48 Девингталь Ю.В. О существовании решения одной задачи Ф.И.Франкля// Доклады АН СССР, 1958, т. 119, с. 15 – 18.
- 49 Волкодав В.Ф. Принцип локального экстремума и его применение к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. Казань: КГУ, 1969.
- 50 Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для гиперболических и смешанных уравнений второго порядка. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. Новосибирск, 1971.
- 51 Бицадзе А.В., Нахушев А.М. О корректной постановке задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях// Доклады АН СССР, 1972, т. 205, с. 9 – 12.
- 52 Овсянников Л.В. О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера-Дарбу// Доклады АН СССР, 1953, №3.
- 53 Бабенко К.И. К теории уравнений смешанного типа// Успехи матем. наук, 1953, т. 8, с. 160.
- 54 Сорокина Н.Г. О сильной разрешимости задачи Трикоми// Укр. матем. журнал, 1966, т. 18, №6, с. 65 – 77.
- 55 Халилов З.И. Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток// Доклады АН Азерб. ССР, 1953, №9.
- 56 Карманов В.Г. О краевой задаче для уравнения смешанного типа// Доклады АН СССР, 1954, т. 95, №3, с. 439 – 442.
- 57 Карманов В.Г. О существовании решений некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа// Известия АН СССР, Серия матем. 1958, т. 22, №1, с. 117 – 134.
- 58 Ладыженская О.А. Об одном методе приближенного решения задачи Лаврентьева-Бицадзе// УМН, 1954, т. 9, №4, с. 187 – 189.
- 59 Волков Е.А. К численному решению задачи Лаврентьева-Бицадзе// Доклады АН СССР, 1955, т. 103, №5.
- 60 Ogawa H. On difference methods for the solution of a Tricomi// Trans Amer. Math. Soc., 1961, v. 100, p. 404 – 424.

- 61 Коваленко Л.И. Разностный метод и единственность решения для задачи Трикоми// Доклады АН СССР, 1965, т. 162, №1, с. 751 – 754.
- 62 Коваленко Л.И. Обобщенное решение задачи Трикоми// Доклады АН СССР, 1965, т. 162, №5, с. 988 – 991.
- 63 Базарбеков А.Б., Кальменов Т.Ш. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Доклады АН СССР, 1981, т. 261, №2.
- 64 Базарбеков А.Б. Гладкость решений задачи Трикоми для уравнения смешанного типа// Дифференциальные уравнения, 1989, №5, т. 25, с.816 – 822.
- 65 Базарбеков А.Б. Критерий существования сильного решения задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта// Дифференциальные уравнения, 1991, №5, т. 27, с.810 – 815.
- 66 Базарбеков А.Б. Краевые задачи для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук, Алматы, 1993, 152с.
- 67 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.- 448с.
- 68 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
- 69 Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: «Высшая школа», 1985-304с.
- 70 Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970- 296с.
- 71 Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: МГУ, 1988, 150с.
- 72 Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Дифференциальные уравнения, 1981, т. 17, №5, с. 873 – 875.
- 73 Егисбаев Н.О. О сопряженной к обобщенной задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Дисс. ... кандидата физ.-мат. наук, Алма-ата, 1990.
- 74 Ержанов Н.Е. Сильная разрешимость одного класса краевых задач типа Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Дисс. ... кандидата физ.-мат. наук, Алма-ата, 1992.
- 75 Садыбеков М.А. Краевые задачи в областях с отходом от характеристики для уравнений гиперболического и смешанного типов второго порядка. Дисс. ... доктора физ.-мат. наук, Ташкент, 1993.
- 76 Аймаханова А.Ш. Критерий сильной разрешимости задачи Трикоми и краевой задачи со смещением для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в пространствах L_p . Дисс. ... кандидата физ.-мат. наук, Шымкент, 1998.
- 77 Джаманкараева М.А. Спектральные свойства фредгольмовых квазирегулярных краевых задач для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Дисс. ... кандидата физ.-мат. наук, Шымкент, 2001, 110с.
- 78 Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 1. Начала теории. М.: Наука, 1967.- 488с.
- 79 Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.- 343с.

- 80 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967, 716с.
- 81 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: Физматгиз, 1964.- 800с.
- 82 Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: «Наука», 1981.- 927с.
- 83 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.- 296с.
- 84 Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. М.: Наука, 1979.- 980с.
- 85 Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.- 289с.
- 86 Роговой А.В., Ахмедов А. Однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе для одного контура// Труды международной научно-практической конференции «Наука и образование на современном этапе». Том 1.- Шымкент, 2005.- С. 245-248.
- 87 Роговой А.В., Ахмедов А. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае двух специальных контуров// Труды международной научно-практической конференции «Совершенствование взаимосвязи образования и науки в XXI веке и актуальные проблемы повышения качества подготовки высококвалифицированных специалистов». Часть 1.- Шымкент: КУДН. 2006.- С. 373-376.
- 88 Роговой А.В. Существование разрывного решения однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров одного класса// Тезисы международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений, теории операторов и космических технологий».- Алматы, 2006.- С. 90 – 91.
- 89 Роговой А.В., Кальменов Т.Ш. О разрывных решениях задачи Трикоми и задачи с конормальной производной для уравнения Геллерстедта// Сборник статей «Кальменов Т.Ш. Научные труды, воспоминания и размышления в начале века».- Алматы, 2006.- С. 59 – 62.
- 90 Роговой А.В. Свойства решений однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе для контуров одного класса// Доклады НАН РК, 2007, №3. С.29 – 33.
- 91 Роговой А.В. О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае нескольких специальных контуров// Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2007, №3 (253). С.3-8.
- 92 Роговой А.В. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае трех специальных контуров// Поиск, 2007, №4. С. 209-213.
- 93 Роговой А.В. Однородная задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров специального класса// Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2007, №2 (53). С.33-38.
- 94 Роговой А.В. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае не бесконечно гладких контуров// Вестник НАН РК, 2007, № 6. С.58 – 61.

- 95 Роговой А.В. О разрывных решениях задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Математический журнал, 2007, том 7, №4 (26). С. 75 – 81.
- 96 Роговой А.В. Существование разрывного решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае нескольких специальных контуров// Труды международной научной конференции «Актуальные проблемы науки и образования в современных условиях». Том 1.– Шымкент: ЮКГИ им. М.Сапарбаева. 2008.– С. 136 - 140.
- 97 Роговой А.В. Существование разрывного решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Поиск, 2008, №2. С. 162-165.
- 98 Роговой А.В. Свойства решений задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2008, №2 (57). С.22-27.
- 99 Роговой А.В. Существование разрывного решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае не бесконечно гладкого контура// Математический журнал, 2009, том 9, №3 (33). С. 78 – 82.
- 100 Роговой А.В. Существование нетривиального разрывного решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Труды VI Международной научно-практической конференции «Проблемы науки и образования в современных условиях»: в 3-х томах. Том II. Шымкент, ЮКГИ им. М.Сапарбаева, 2009г., С. 207-210.
- 101 Роговой А.В. Об однородной задаче Трикоми и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Поиск, 2010, №4. С. 161-165.
- 102 Роговой А.В. Существование не-тривиального разрывного решения однородной задачи Трикоми и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Известия НАН РК. Серия физико-математическая, 2010, №3, С. 126 – 129.
- 103 Роговой А.В. Решение задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе для контуров специального вида// Вестник НАН РК, 2010, №6, С. 5–9.
- 104 Роговой А.В. О задаче Трикоми и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Доклады НАН РК, 2010, №6, С. 12 – 15.
- 105 Задача Трикоми и ее сопряженная для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в случае контуров одного класса// Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2011, № 1 (68). С.42 –49.
- 106 Роговой А.В., Тенизбаев Е.Ж. Свойства решений задачи Трикоми и ее сопряженной для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Труды международной научно-практической конференции на тему «Проблемы современного образования и науки». Шымкент, ЮКГИ им. М.Сапарбаева, 2011, С. 333-338.
- 107 Rogovoy A.V. Properties of Solutions of the Tricomi Problem for the Lavrent'ev–Bitsadze Equation at Corner Points// Differential Equations, 2013, Vol. 49, No. 12, pp. 1650–1654.
- 108 Роговой А.В. О решениях специального вида задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта// Труды VII международной научно-практической конференции «Проблемы науки и образования в условиях мировой

- глобализации», Шымкент, ЮКГИ им. М.Сапарбаева., 2015, том II.- С. 270-273.
- 109Роговой А.В. Задача Трикоми для уравнения Геллерстедта// Материалы международной научно-практической конференции «Шаг в будущее: интеграция науки и практики в современных условиях», Шымкент, университет «Мирас», 2015, том I.- С. 299-302.
- 110Rogovoy A.V. About properties of solutions of Tricomi problem for Gellerstedt equation// AIP Conference Proceedings **1759**, 020124 (2016); doi: 10.1063/1.4959738, pp. 020124-1-020124-5.
- 111Роговой А.В., Алдабергенов Б.А. Об одном типе решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта// Труды международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию со дня рождения академика М.Б.Сапарбаева на тему «Актуальные проблемы образования и науки XXI века в рамках обеспечения третьей модернизации Казахстан». Том II. Научное издание.- Шымкент: типография «Алем», 2017.- С. 430 – 438.
- 112Роговой А.В., Бесбаев Г.А. О потенциальных граничных условиях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе// Тезисы докладов ежегодной научной апрельской конференции института математики и математического моделирования, посвященной Дню Науки, и научного семинара «Дифференциальные операторы и моделирование сложных систем» (DOMCS-2017), посвященному 70-летию юбилею профессора Дженалиева М.Т.- Алматы, 2017, С. 124-125.
- 113Роговой А.В., Карашева К.К. Свойства решений одного класса задачи Трикоми для уравнений смешанного типа// Вестник КазНУ, 2018, №3 (127).- С. 469-478.
- 114Роговой А.В., Карашева К.К. Свойства новых классов решений краевых задач для уравнений смешанного типа// Сборник докладов XVI Международного конгресса социальных наук тюркоязычного мира, Шымкент: ун-т «Мирас», 2018.- С. 795-805.

А.В. РОГОВОЙ

**СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
СМЕШАННОГО ТИПА**

МОНОГРАФИЯ

Подписано в печать 04.06.2019, Формат бумаги А4,
Бумага типографская. Объем 8,75 п.л. Тираж 500 экз. Типография «Әлем».
Заказ № 0406, г.Шымкент, ул. Г.Илиева, 7
Email: alembaspasy@mail.ru